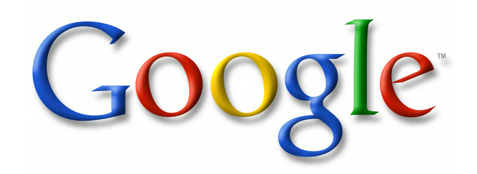




HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

AUF VERANLASSUNG

DER

MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE

DER KGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

UND UNTER MITWIRKUNG DER HERREN:

JACOB LÜROTH, EDUARD STUDY, JUSTUS GRASSMANN,
HERMANN GRASSMANN DER JÜNGERE, GEORG SCHEFFERS

HERAUSGEGEBEN

VON

FRIEDRICH ENGEL.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1902.

HERMANN GRASSMANNS

GESAMMELTE

MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE.

ZWEITEN BANDES ZWEITER THEIL:

DIE ABHANDLUNGEN ZUR MECHANIK UND ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

JACOB LÜROTH UND FRIEDRICH ENGEL.

MIT 51 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1902.

Vorbemerkungen.

Als ich im Jahre 1896 den zweiten Theil des ersten Bandes dieser Ausgabe der Oeffentlichkeit übergab, ahnte ich nicht, dass sich das Erscheinen des zweiten Bandes so über die Maassen verzögern würde. Der Druck der ersten Abtheilung dieses Bandes, die die Abhandlungen über Geometrie und Analysis enthalten sollte, wurde zwar schon im Oktober 1899 begonnen, machte jedoch aus Ursachen, die zu beseitigen nicht in meiner Macht stand, die ich aber hier nicht auseinandersetzen will, nur äusserst langsame Fortschritte. Unter diesen Umständen war gar nicht abzusehen, wann die Abhandlungen über Mechanik, die Lüroth mir schon 1893 druckfertig zugesandt hatte, an die Reihe kommen würden. Ich bedaure daher nur, dass ich nicht schon längst auf den Ausweg verfallen bin, den mir Lüroth Anfang 1902 vorgeschlagen hat und den ich jetzt gewählt habe, nämlich die Abhandlungen über Mechanik zusammen mit denen über mathematische Physik besonders paginirt als zweiten Theil des zweiten Bandes herauszugeben. Der erste Theil des zweiten Bandes, Geometrie und Analysis, wird hoffentlich in nicht allzuferner Zeit nachfolgen.

Während Lüroth in dem vorliegenden Theile Alles zusammengestellt hat, was Grassmann über Mechanik veröffentlicht hat und was aus dem Nachlass zur Veröffentlichung geeignet erschien, habe ich mich, was die mathematische Physik angeht, auf die bereits gedruckten Arbeiten beschränkt und den Nachlass nur in den Anmerkungen soweit verwertet, als es zur Erläuterung der gedruckten Arbeiten und zur wirklichen Ausführung einiger darin blos angedeuteter Betrachtungen erforderlich war. Alles übrige, was der Nachlass noch sonst Mittheilenswerthes über mathematische Physik enthält, verspare ich auf den dritten Band.

Meinen Kollegen H. Hirt in Leipzig, J. Sommer in Bonn, E. v. Weber in München verdanke ich einige Nachweisungen, die mir sonst nur schwer erreichbar gewesen wären. Einen Beitrag von O. Külpe in Würzburg habe ich auf S. 254 verwerthet. Allen Genannten möchte ich auch hierdurch meinen Dank für ihre Unterstützung aussprechen.

Leipzig den 31. Juli 1902.

Friedrich Engel.

Inhaltsverzeichniss

zum zweiten Theile des zweiten Bandes.

II. Abtheilung.

Analytische Mechanik,

herausgegeben von Jacob Lüroth.

III. Abtheilung.

Mathematische Physik,

herausgegeben von Friedrich Engel.



II. ABTHEILUNG.

ANALYTISCHE MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON

JACOB LÜROTH.

I. Grundriss der Mechanik

(für den Unterricht in Prima).

Von

Professor **Hermann Günther Grassmann.**

Programm des Königlichen und Stadtgymnasiums zu Stettin, September 1867.

Einleitung.

§ 1. Die Physik hat die Aufgabe, die Erscheinungen der leblosen (unorganischen) Natur auf ihre Gesetze zurückzuführen. Alle diese Erscheinungen sind ursprünglich Bewegungen. Zur Bestimmung der Bewegung bedarf man eines Zeitmasses und eines Längenmasses. Als Zeitmass ist die Sekunde gebräuchlich, als Längenmass in unseren Gegenden der preussische Fuss.

Anm. In wissenschaftlichen Werken wird häufig der französische Meter als Längenmass zu Grunde gelegt. Dieser ist der zehnmillionste Theil eines Bogens, der vom Nordpol unserer Erde in südlicher Richtung bis zum Aequator reicht; er beträgt 3,1862 preussische Fuss. Da jedoch der Meter weder ein natürliches noch ein historisches Mass ist, so wird er auch niemals volksthümlich werden und ist daher auch in der Wissenschaft zu meiden. Auch das französische Volk ist beim Fussmasse geblieben, hat aber, um mit dem Meter in Uebereinstimmung zu kommen, den neuen französischen Fuss zu $1/3$ Meter festgesetzt. Dieser neue Fuss $= 1/3$ Meter $= 1{,}0621$ preussische Fuss würde, wenn der Zoll $= 1/10$ Fuss, die Linie $= 1/10$ Zoll, die Ruthe $= 10$ Fuss u. s. w. angenommen würde, sich vortrefflich zu einem allgemein einzuführenden Masse eignen.

Erster Abschnitt.

Bewegung eines Punktes.

§ 2. „Man sagt von einem Punkte, dass er seine Bewegung unverändert beibehalte, wenn er in gleichen Zeittheilen stets gleichgrosse und gleichgerichtete Wege zurücklegt."

Anm. Wenn der Punkt in gleichen Zeiten zwar gleichgrosse, aber nicht gleichrichtete Wege zurücklegt, so bleibt seine Geschwindigkeit ungeändert,

aber nicht die Richtung seiner Bewegung. Eine Bewegung, welche stets dieselbe Richtung beibehält, heisst geradlinigt.

2 § 3. Wenn der Punkt seine Bewegung in jedem Augenblicke ändert, so kann man die Bewegung, die er in einem Augenblicke hat, nicht mehr bestimmen durch den Weg, den er wirklich zurücklegt, sondern man muss sich vorstellen, dass der Punkt die Bewegung, welche er in jenem Augenblicke hat, während eines gewissen Zeitraums unverändert beibehielte, und dann den Weg, den er unter dieser Voraussetzung zurücklegen würde, zum Masse der Bewegung benutzen. Dies führt zu der folgenden Bestimmung:

„Die Bewegung, welche ein sich bewegender Punkt in einem Augenblicke hat, wird ihrer Richtung und Länge nach gemessen durch die Strecke, welche er zurücklegen würde, wenn er seine Bewegung eine Sekunde lang unverändert beibehielte; die Länge dieser Strecke heisst die Geschwindigkeit."

Anm. Die Bewegung wird also durch ihre Geschwindigkeit und ihre Richtung bestimmt, und beides muss in den Begriff der Strecke aufgenommen werden, wenn durch sie die Bewegung vollkommen dargestellt werden soll. Dies führt zu den folgenden geometrischen Begriffen.

§ 4. „Eine gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung heisst eine Strecke, das heisst zwei Strecken werden nur dann einander gleich gesetzt, wenn sie gleiche Länge und Richtung haben."

Anm. Im Folgenden sollen überall die Punkte mit grossen, die Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden, oder die letzteren auch mit zwei grossen Buchstaben, von denen der erste den Anfangspunkt, der letzte den Endpunkt der Strecke benennt. Die Strecken AB und BA haben zwar gleiche Länge, aber entgegengesetzte Richtung und dürfen daher als Strecken nicht einander gleich gesetzt werden. Da sie sich wie entgegengesetzte Grössen verhalten, so wird man $BA = -AB$ setzen können. Der Begriff der Bewegung führt zugleich zur Addition solcher Strecken, indem man sich nämlich vorstellt, dass ein sich bewegender Punkt nach einander die zu addirenden Strecken zurücklegt; dann wird die Strecke, welche der Punkt zurücklegen muss, um aus der ersten Lage in die letzte zu gelangen, als Summe der Strecken aufgefasst werden können.

§ 5. „Strecken addirt man, indem man sie (ohne Aenderung ihrer Länge und Richtung) stetig, das heisst so aneinanderlegt, dass, wo die eine aufhört, die nächstfolgende anfängt; alsdann nennt man die Strecke vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkte der letzten die Summe jener Strecken. Das Subtrahiren einer Strecke besteht darin, dass man die entgegengesetzte addirt."

Anm. Wenn also a und b Strecken sind, so erhält man $a + b$, indem man von beliebigem Anfangspunkte C aus die gerade Linie CD gleichlang und gleichgerichtet mit a zeichnet, und daran die gerade Linie DE legt, welche mit b gleichlang und gleichgerichtet ist, dann ist $CE = a + b$; und $a - b$ erhält man daraus, indem man ED um sich selbst verlängert bis F; so ist $CF = a - b$.

§ 6. Aus der Geometrie ist bekannt, dass, wenn AB mit A_1B_1 und ebenso BC mit B_1C_1 gleich lang und gleichgerichtet sind, auch AC mit A_1C_1 gleich lang und gleichgerichtet sein muss, und also die Summe von dem Anfangspunkte, an den man die erste Strecke anlegt, ganz unabhängig ist. Aus bekannten Sätzen vom Parallelogramm folgt aber auch, dass für Strecken

$$a + b = b + a$$

ist; denn legt man an einen beliebigen Punkt C die Strecke $a = CD$, 3 daran $b = DE$ an, so ist $CE = a + b$; legt man aber an C die Strecke $b = CF$ an, so ist FE, da $CDEF$ ein Parallelogramm ist, gleich lang und gleichgerichtet mit a; also CE zu gleicher Zeit $= b + a$. Ganz unmittelbar ergeben sich die übrigen Grundformeln der Addition und Subtraktion, nämlich

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$
$$a + b - b = a$$
$$a - b + b = a.$$

Da aber aus diesen vier Grundformeln alle Gesetze der Addition und Subtraktion hervorgehen, so folgt der Satz:

„Alle Gesetze der Addition und Subtraktion lassen sich auch auf Strecken anwenden."

§ 7. Da ferner die Vervielfachung und Theilung beliebiger Grössen (das heisst ihre Multiplikation und Division mit einer Zahl) nur auf dem Begriffe der Addition und Subtraktion dieser Grössen beruht, so folgt:

„Alle Gesetze der Vervielfachung und Theilung gelten auch für Strecken."

Anm. Um αa zu construiren, wenn a eine Strecke und α eine Zahl bedeutet (gleich viel ob sie ganz, oder gebrochen oder irrational ist), hat man nach dem Begriffe der Vervielfachung so zu verfahren, dass man von beliebigem Anfangspunkte B eine Strecke BC zieht, welche mit der Strecke a gleichgerichtet oder ihr entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem die Zahl α positiv oder negativ ist, und deren Länge sich zu der von a verhält, wie der positive Werth von α zu 1.

§ 8. Um nun die Lage zu bestimmen, die ein sich bewegender Punkt P zu jeder Zeit hat, kann man einen beliebigen festen Punkt O zu Hülfe nehmen, und die Strecke $OP = p$ ziehen, deren Anfangspunkt also fest, und deren Endpunkt der sich bewegende Punkt P ist. Diese Strecke nennt man den Träger oder radius vector des sich bewegenden Punktes. Um nun diesen Träger durch die Zeit ausdrücken zu können, hat man auch für die Zeit einen willkürlichen Anfangspunkt anzunehmen. Es sei mit t die Anzahl der Sekunden bezeichnet, die seit diesem Anfangspunkte verflossen sind. Um nun p durch t

auszudrücken, ist es das einfachste, p gleich einer nach Potenzen von t steigenden Potenzreihe, deren Koefficienten Strecken sind, zu setzen.

Wir wollen diese Gleichung die **Ortsgleichung** der Bewegung nennen. Also:

„Die **Ortsgleichung** der Bewegung lässt sich in der Form

$$p = a + bt + ct^2 + \cdots$$

darstellen, wo $a, b, c, \ldots$ unveränderliche Strecken sind, und p der Träger des Punktes ist, in welchem der sich bewegende Punkt t Sekunden nach dem als Anfangszeit angenommenen Augenblicke angelangt ist."

Anm. Wenn jedoch die Gliederzahl dieser Reihe eine unendliche ist, so muss man noch (was stets durch die Wahl des Anfangspunktes der Zeit erreicht werden kann) die Bedingung erfüllen, dass die Reihe eine ächte sei. Eine Reihe ist nämlich eine ächte, wenn sie sich als steigende Potenzreihe darstellen lässt, deren Base kleiner als 1 (aber positiv) ist, und deren Koefficienten endlich sind, 4 das heisst nicht † über eine gewisse Gränze hinaus wachsen. Denn mit solchen ächten Reihen lassen sich alle Rechnungen und Verknüpfungen vornehmen, wie mit einfachen Grössen, während dies bei unächten Reihen nicht gestattet ist*). In unserm Falle also ist die angeführte Reihe für p eine ächte, wenn zum Beispiel t (numerisch) kleiner als 1 ist und $a, b, c, \ldots$ endlich sind, oder wenn t (numerisch) kleiner als 2 ist, und a, $2b$, $4c, \ldots$ endlich sind und so weiter.

§ 9. Um nun die Bewegungsgleichung aus der Ortsgleichung (§ 8) abzuleiten, hat man auf den Begriff der Bewegung (§ 3) zurückzugehen, das heisst die Strecke zu bestimmen, welche der Punkt zurücklegen würde, wenn er die Bewegung, die er zur Zeit t hat, eine Sekunde lang unverändert beibehielte. Um diese Strecke u zu finden, nehmen wir einen sehr kleinen Zeittheil τ an, welcher der n-te Theil einer Sekunde sein mag, berechnen dann den Weg PP', den der Punkt in der Zeit zwischen t und $t + \tau$ zurücklegt, und nehmen diesen Weg n-mal, so erhalten wir um so genauer die Bewegung u, je kleiner τ angenommen wird, und ganz genau, wenn man zuletzt τ verschwinden lässt. O sei der Anfangspunkt der Träger, P die Lage des sich be-

*) Die neueren Mathematiker sind von den Rechnungen mit Reihen zurückgekommen, weil sie sich dadurch häufig in Schwierigkeiten, ja in Widersprüche verwickelt sahen, für deren Lösung ihnen die Reihen selbst keine Mittel an die Hand zu bieten schienen. Der Grund dieser Verwickelungen liegt, wie ich dies in meiner Ausdehnungslehre von 1862, n. 454 ff. {diese Ausgabe I, 2, S. 303} angedeutet habe, darin, dass man den Begriff der ächten Reihe nicht kannte und dafür auf den der gewöhnlichen konvergenten Reihen zurückging. So zum Beispiel macht, von diesem letzteren Begriffe ausgehend, Schlömilch in seiner sonst so einsichtsvollen Beurtheilung meiner Trigonometrie (in der Literaturzeitung von 1865, p. 20. 21) gegen meine Entwickelung der trigonometrischen Funktionen in Reihen Einwürfe, die er jedenfalls unterdrückt haben würde, wenn er die angeführte Stelle meiner Ausdehnungslehre gekannt hätte.

wegenden Punktes zur Zeit t, P' seine Lage zur Zeit $t + \tau$. So ist (nach § 8) $OP = p = a + bt + ct^2 + \cdots$

$$OP' = a + b(t+\tau) + c(t+\tau)^2 + d(t+\tau)^3 + \cdots$$
$$= a + b(t+\tau) + c(t^2 + 2t\tau + \cdots) + d(t^3 + 3t^2\tau + \cdots) + \cdots$$
$$= a + bt + ct^2 + dt^3 + \cdots + \tau(b + 2ct + 3dt^2 + \cdots) + \tau^2 r,$$

wo r wieder eine steigende Potenzreihe von τ bedeutet,

$$= OP + \tau(b + 2ct + 3dt^2 + \cdots) + \tau^2 r.$$

Schafft man OP nach links herüber, so erhält man auf der linken Seite $-OP + OP'$, das heisst $PO + OP' = PP'$ (nach § 5). Also ist

$$PP' = \tau(b + 2ct + 3dt^2 + \cdots) + \tau^2 r,$$

also

$$nPP' = n\tau(b + 2ct + 3dt^2 + \cdots) + n\tau \,.\, \tau r.$$

Nun ist aber nach der Voraussetzung $\tau = \frac{1}{n}$, also $n\tau = 1$, somit

$$nPP' = b + 2ct + 3dt^2 + \cdots + \tau r.$$

Nun stellt aber nPP' nach dem Obigen die Bewegung u dar, wenn man τ verschwinden lässt, also wird

$$u = b + 2ct + 3dt^2 + \cdots. \qquad 5$$

Also:

„Aus der Ortsgleichung

$$p = a + bt + ct^2 + dt^3 + \cdots$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$u = b + 2ct + 3dt^2 + \cdots$$

dadurch, dass man in der Potenzreihe von t jedes Glied zuerst mit dem Exponenten von t multiplicirt, und darauf mit t dividirt, und den Träger p' zur Zeit $t + \tau$ findet man

$$p' = p + u\tau + r\tau^2,$$

wo r eine steigende Potenzreihe von τ bedeutet."

§ 10. Man nennt dies Verfahren, wonach man also in einer Potenzreihe von t jedes Glied mit dem Exponenten von t multiplicirt und darauf mit t dividirt, differenziiren und das Resultat das Differenzial (nach t). Somit können wir den vorhergehenden Satz auch so ausdrücken:

„Man erhält aus der Ortsgleichung die Bewegungsgleichung, indem man die erstere differenziirt," oder:

„Die Bewegung ist das Differenzial des Trägers."

§ 11. „Wenn ein Punkt seine Bewegung in gleichen Zeittheilen stets um gleiche Strecken ändert, so sagt man, der Punkt habe seine Bewegung gleichmässig geändert."

Anm. Zu vergleichen ist § 2. Wenn wir sagen, die Bewegung hat sich von einem Zeitpunkte zum andern um eine Strecke geändert, so ist das so zu verstehen, dass man zu der Bewegung im ersten Zeitpunkte diese Strecke addiren muss, um die Bewegung im zweiten Zeitpunkte zu erhalten.

§ 12. Wenn der Punkt seine Bewegung nicht gleichmässig ändert, so kommt es darauf an, das Mass der Aenderung für jeden Augenblick zu bestimmen. Man darf diese Aenderung nicht mehr durch die Strecke ausdrücken, um welche sich während eines Zeitraumes die Bewegung wirklich geändert hat; sondern man muss sich vorstellen, dass die Bewegungsänderung, in welcher der Punkt in jenem Augenblicke begriffen ist, sich eine Sekunde lang gleichmässig fortsetzte, und die Strecke, um welche sich unter dieser Voraussetzung die Bewegung ändern würde, zum Masse der Bewegungsänderung benutzen.

„Die Bewegungsänderung, in welcher ein Punkt in einem Augenblicke begriffen ist, wird gemessen durch die Strecke, um welche sich seine Bewegung ändern würde, wenn er jene Bewegungsänderung eine Sekunde lang gleichmässig fortsetzte."

Anm. Wenn die Bewegung eine geradlinigte ist, so heisst die Bewegungsänderung Beschleunigung oder Verzögerung, je nachdem sie mit der Bewegung gleichgerichtet oder entgegengesetzt gerichtet ist. (Vergl. § 3.)

§ 13. „Wenn

$$u = a + bt + ct^2 + dt^3 + \cdots$$

die Bewegungsgleichung ist, so ist

6 $$v = b + 2ct + 3dt^2 + \cdots$$

die Aenderungsgleichung" oder:

„Die Bewegungsänderung v ist das Differenzial der Bewegung u."

„Die Bewegung u' zur Zeit $t + \tau$ findet sich

$$u' = u + v\tau + r\tau^2,$$

wo r eine steigende Potenzreihe von τ ist."

Der Beweis ist ganz entsprechend dem in § 9. In der That, wenn die Sekunde in n gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil mit τ bezeichnet wird, also $n\tau = 1$ ist, und wenn dann OQ die Bewegung (u) zur Zeit t darstellt, und OQ' die Bewegung zur Zeit $t + \tau$, so hat sich während dieser Zeit die Bewegung geändert um die Strecke QQ' (weil $OQ' = OQ + QQ'$). Dann stellt nQQ' um so genauer das Mass der Bewegungsänderung für den Zeitpunkt t dar, je kleiner τ ist, und ganz genau, wenn man zuletzt τ verschwinden lässt. Das übrige folgt ganz wie in § 9.

§ 14. Durch Zusammenfügung von § 9 und § 13 folgt:

„Aus dem Träger erhält man die Bewegungsänderung, wenn man

die Potenzreihe, welche dem Träger gleichgesetzt ist, differenziirt und die so erhaltene Potenzreihe zum zweiten Male differenziirt" oder

„Die Bewegungsänderung ist das zweite Differenzial des Trägers."

Wenn also der Träger

$$p = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + \cdots$$

ist, so ist die Bewegungsänderung

$$v = 2c + 3 \,.\, 2 \,.\, dt + 4 \,.\, 3 \,.\, et^2 + \cdots.$$

§ 15. Daraus, dass zwei gleiche Strecken auch gleich bleiben, wenn man zu ihnen gleiche Strecken addirt, folgen sogleich die Sätze:

„Wenn zwei Punkte zu irgend einer Zeit gleiche Lage und zu jeder Zeit gleiche Bewegung haben, so haben sie auch zu jeder Zeit gleiche Lage."

„Wenn zwei Punkte zu irgend einer Zeit gleiche Bewegung und zu jeder Zeit gleiche Bewegungsänderung haben, so haben sie auch zu jeder Zeit gleiche Bewegung."

„Wenn zwei Punkte zu irgend einer Zeit gleiche Lage, und zu irgend einer Zeit gleiche Bewegung, jederzeit aber gleiche Bewegungsänderung haben, so haben sie auch zu jeder Zeit gleiche Lage."

Anm. Der dritte dieser Sätze ist aus den beiden ersten zusammengesetzt. Alle drei kann man auch so ausdrücken: Die Lage eines Punktes zu jeder Zeit ist bestimmt durch die Lage zu irgend einer Zeit und durch die Bewegung zu jeder Zeit, und die Bewegung zu jeder Zeit durch die Bewegung zu irgend einer Zeit und durch die Bewegungsänderung zu jeder Zeit.

§ 16. Es sei α der Träger des sich bewegenden Punktes für den Zeitpunkt, welcher als Anfangspunkt von t gesetzt ist, das heisst, für den $t = 0$ ist, und sei

$$u = a + bt + ct^2 + \cdots$$

für jede Zeit t (für welche die Reihe noch ächt ist); so entsteht die Aufgabe, den Träger p für diese ganze Zeit zu finden. Nimmt man einen Punkt zu Hülfe, dessen Träger p' von demselben Anfangspunkte O aus

$$= \alpha + at + \tfrac{1}{2} bt^2 + \tfrac{1}{3} ct^3 + \cdots$$

ist, so ist sein Anfangsträger (für $t = 0$) gleichfalls $= \alpha$, und seine Bewegung das Differenzial des Trägers, also (nach § 9)

$$= a + 2 \cdot \tfrac{1}{2} bt + 3 \cdot \tfrac{1}{3} ct^2 + \cdots$$
$$= a + bt + ct^2 + \cdots = u;$$

also (nach § 15) seine Lage stets dieselbe, wie für den ersten Punkt, also auch die Träger beider stets gleich, das heisst

$$p = p' = \alpha + at + \tfrac{1}{2} bt^2 + \tfrac{1}{3} ct^3 + \cdots.$$

Dasselbe gilt, wenn α die Anfangsbewegung ist, und statt des Trägers p die Bewegung, und statt der Bewegung u die Bewegungsänderung gesetzt wird. Also

„Wenn α der Anfangsträger (oder die Anfangsbewegung) und

$$u \text{ (oder } v) = a + bt + ct^2 + \cdots$$

ist, so ist

$$p \text{ (oder } u) = \alpha + at + \tfrac{1}{2}bt^2 + \tfrac{1}{3}ct^3 + \cdots,$$

das heisst: Man erhält aus der Bewegung den Träger (oder aus der Bewegungsänderung die Bewegung), indem man in der Potenzreihe von t, durch welche die erstere dargestellt wird, jedes Glied zuerst mit t multiplicirt, und das so erhaltene Glied mit seinem Exponenten dividirt, und endlich ein unveränderliches Glied (α) hinzufügt."

Anm. Man nennt dies Verfahren integriren, das Resultat das Integral (nach t).

§ 17. Eine Potenzreihe integriren heisst also jedes Glied zuerst mit der Base multipliciren, und das so erhaltene Glied mit seinem Exponenten dividiren, und endlich ein unveränderliches Glied hinzufügen. Also:

„Der Träger ist das Integral der Bewegung, die Bewegung das Integral der Bewegungsänderung."

§ 18. Hieraus folgt:

„Der Träger ist das zweite Integral (das Integral des Integrals) von der Bewegungsänderung, oder wenn

$$v = a + bt + ct^2 + \cdots$$

ist, so ist

$$p = \beta + \alpha t + \tfrac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2.3}bt^3 + \frac{1}{3.4}ct^4 + \cdots,$$

wo β der Anfangsträger, und α die Anfangsbewegung ist."

Anm. Die bisher entwickelten Sätze ergaben sich mit Nothwendigkeit aus dem Begriffe der Bewegung. Dagegen bedürfen die folgenden drei Gesetze § 20—22, welche allen Bewegungen in der Natur zu Grunde liegen, zu ihrer Ableitung der Beobachtung dieser Bewegungen. Sie sind in ähnlicher Form zuerst von Newton in seinem berühmten Werke: Philosophiae naturalis principia mathematica 1687 der gesammten Naturbetrachtung zu Grunde gelegt, und finden ihre vollkommene Sicherstellung dadurch, dass alle Bewegungen in der Natur, wie verwickelt sie auch sein mögen, sich genau nach ihnen regeln.

§ 19. Erklärung. „Jede Ursache einer Bewegung, welche in einem Punkte in der Art ihren Sitz hat, dass der Punkt, wo er sich auch befinden mag, Bewegungen hervorruft, welche in der nach ihm hin gezogenen geraden Linie liegen, heisst Kraft, der Punkt selbst ein Körperpunkt, oder ein materieller Punkt."

Anm. Wir können den einzelnen Körperpunkt nicht trennen. Alle Naturkörper sind vielmehr Vereine solcher Körperpunkte, wie auch der mathematische

Körper ein Verein mathematischer Punkte ist. Wir können daher auch nicht die einzelne Kraft trennen, sondern haben es immer mit einem Vereine von Kräften zu thun. Als annähernde Beispiele für solche aufeinander wirkenden Punkte können zwei elektrische Kügelchen dienen, welche sich anziehen, wenn sie entgegengesetzte Elektrizität haben, sich abstossen, wenn gleichartige.

§ 20. Das Beharrungsgesetz (Lex I Newt.). „Jeder Körperpunkt, auf den keine Kraft von aussen einwirkt, behält seine Bewegung unverändert bei."

Anm. Da man keinen Körperpunkt von der Einwirkung der übrigen ausschliessen kann, so lässt sich das Gesetz nicht unmittelbar beobachten. Annähernd ergiebt es sich aus den Bewegungen der Himmelskörper, der Fortbewegung des Wagenzuges auf wagrechter Eisenbahn, auch wenn der Dampfwagen nicht mehr arbeitet; aus dem Wurfe, besonders dem Abschiessen einer sich drehenden Spitzkugel; dem Sprunge auf einem sich bewegenden Körper, namentlich auf der sich bewegenden Erde; der Wirkung eines plötzlich anhaltenden oder abfahrenden Wagens auf die darin sitzenden.

§ 21. Das Gesetz der Gegenwirkung (vergl. Lex III Newt.). „Wenn ein Körperpunkt auf einen andern bewegend wirkt, so wirkt auch stets der letztere auf den ersteren bewegend, und zwar liegen die Bewegungen, die sie sich gegenseitig mittheilen, auf der Verbindungslinie beider Punkte und sind einander entgegengesetzt gerichtet. Wenn diese beiden Bewegungen (abgesehen von der entgegengesetzten Richtung) gleich gross sind, so sagt man, die beiden Punkte seien an Masse gleich."

Anm. Für Punkte von ganz gleicher Beschaffenheit lässt sich das Gesetz als nothwendig nachweisen. Die Kräfte können anziehende oder abstossende sein. Für die letztern liefern zwei gleichartig elektrische Kügelchen ein annäherndes Beispiel.

§ 22. Das Mass der Kraft (vergl. Lex II Newt.). „Die Wirkung der Kraft ist Bewegungsänderung. Die Kraft wird gemessen durch die Bewegungsänderung, welche sie einem Körperpunkte, dessen Masse gleich 1 gesetzt wird, mittheilt."

Anm. Die Kraft ist hiernach also als Strecke dargestellt. Wie gross die als 1 gesetzte Masse sein soll, ist an sich willkürlich, eine nähere Bestimmung darüber folgt bei der Bewegung der Körper. In diesem Gesetze ist zugleich das Beharrungsgesetz (§ 20) mit enthalten.

§ 23. Gesetz der Addition der Kräfte. „Zwei Kräfte, die auf einen Punkt wirken, sind ihrer Summe gleichwirkend, das heisst üben dieselbe Wirkung, wie ihre Summe, wenn sie allein wirkt."

Die Kräfte sind nach § 22 als Strecken dargestellt, sie werden also addirt nach § 5. Bei zwei Kräften, die nicht in derselben geraden Linie liegen, ist diese Summe (nach § 5) † die Diagonale des Parallelogramms, welches jene Kräfte zu Seiten hat. Es folgt dieser Satz aus § 22. Denn stellt man sich vor, daſs beide Kräfte unmittelbar nach einander wirken, so bewirkt die erste eine Bewegungsänderung, welche 9

sich zu der vorhandenen Bewegung addirt, die zweite eine Bewegungsänderung, welche sich zu jener Summe addirt. Statt dessen kann man nun (nach § 6) die Summe der beiden Bewegungsänderungen zu der ursprünglichen Bewegung addiren, also ist die Wirkung beider Kräfte gleich der ihrer Summe.

Anm. Auch Newton hat diesen Satz als Zusatz zu dem erwähnten Gesetze dargestellt. Durch Versuche beweist man ihn, indem man drei Fäden in einen Knoten knüpft, und zwei davon über Rollen gehen lässt und an alle drei Enden Gewichte hängt; dann stellen sich die Fäden so, dass, wenn man allen dreien Längen giebt, die sich wie die Gewichte verhalten, und jeden auf diese Weise als Strecke darstellt, die Summe dieser drei Strecken null ist, also jede der Summe der beiden andern entgegengesetzt ist.

Zweiter Abschnitt.

Bewegung des Schwerpunktes eines Vereins.

§ 24. „Wenn ein Verein aus lauter an Masse gleichen Punkten besteht, so versteht man unter dem Schwerpunkte des Vereins denjenigen Punkt, für welchen die Strecken, die von ihm aus nach den Punkten des Vereins gezogen werden, zur Summe Null geben, das heisst für den

$$SA_1 + \cdots + SA_n = 0$$

ist, wenn S der Schwerpunkt des Vereins $A_1, \ldots, A_n$, ist."

Anm. Wenn die Punkte des Vereins an Masse ungleich sind, so kann man den Verein doch (genau oder annäherungsweise) dadurch in einen Verein massengleicher Punkte verwandeln, dass man in den einzelnen Punkten mehrere solcher an Masse gleicher Punkte vereinigt denkt. Es genügt daher, die folgenden Sätze nur für solche Vereine von Punkten, die an Masse gleich sind, zu beweisen, und solche Vereine sollen im Folgenden stets vorausgesetzt werden.

§ 25. Es soll der Schwerpunkt S eines Vereins $A_1, \cdots, A_n$ gesucht werden.

Nach § 24 ist

$$SA_1 + \cdots + SA_n = 0.$$

Wenn nun P ein beliebiger Punkt ist, so ist (nach § 5)

$$SA_1 = SP + PA_1, \cdots, SA_n = SP + PA_n,$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= (SP + PA_1) + \cdots + (SP + PA_n) \\ &= nSP + (PA_1 + \cdots + PA_n). \end{aligned}$$

Also, wenn man nSP auf beiden Seiten subtrahirt, das heisst nPS addirt,

$$nPS = PA_1 + \cdots + PA_n$$

oder

$$PS = \frac{1}{n}(PA_1 + \cdots + PA_n).$$

Und ebenso findet man aus dieser Gleichung durch das umgekehrte Verfahren wieder die erste.

„Man findet den Schwerpunkt eines Vereins von n massengleichen Punkten, indem man von einem beliebigen Punkte P nach allen Punkten des Vereins Strecken zieht, diese addirt, und PS gleich dem n-ten Theil dieser Summe setzt, so ist S der Schwerpunkt."

§ 26. „Jeder Verein hat nur einen Schwerpunkt." 10

Denn angenommen, er hätte deren zwei, S und S_1, so wende man das Verfahren von § 25 an, indem man S_1 statt P setzt, so erhält man

$$0 = nSS_1 + (S_1A_1 + \cdots + S_1A_n),$$

wo aber nach § 24 die eingeschlossene Summe null sein muss, wenn S_1 Schwerpunkt ist; also

$$nSS_1 = 0, \quad SS_1 = 0,$$

das heisst, S_1 fällt mit S zusammen.

Uebungsaufgaben: Den Schwerpunkt zwischen zwei Punkten A und B, den zwischen drei Punkten A, B, C, zwischen drei Punkten A und vier Punkten B, zwischen drei Punkten A, vier Punkten B, fünf Punkten C zu finden. Wie kann man dabei P wählen, um die bequemste Konstruktion zu erhalten? Welche planimetrischen und stereometrischen Sätze ergeben sich, wenn man P beliebig wählt?

§ 27. Es soll der Schwerpunkt des Ganzen aus denen seiner Theile gefunden werden.

Der eine Theil enthalte die Punkte $A_1, \cdots, A_\alpha$, sein Schwerpunkt sei A, der zweite Theil enthalte die Punkte $B_1, \cdots, B_\beta$, sein Schwerpunkt sei B, u. s. w.; der Schwerpunkt des ganzen sei S und die Anzahl seiner Punkte $\alpha + \beta + \cdots$ sei $= n$, so hat man nach § 25

$$nPS = (PA_1 + \cdots + PA_\alpha) + (PB_1 + \cdots + PB_\beta) + \cdots.$$

Man setze (nach § 5) $PA_1 = PA + AA_1, \cdots, PA_\alpha = PA + AA_\alpha$, $PB_1 = PB + BB_1$ u. s. w., so erhält man

$$\begin{aligned} nPS &= [(PA + AA_1) + \cdots + (PA + AA_\alpha)] + \\ &\quad + [(PB + BB_1) + \cdots + (PB + BB_\beta)] + \cdots \\ &= [\alpha PA + (AA_1 + \cdots + AA_\alpha)] + \\ &\quad + [\beta PB + (BB_1 + \cdots + BB_\beta)] + \cdots. \end{aligned}$$

Aber hier sind die Summen $AA_1 + \cdots + AA_\alpha$, $BB_1 + \cdots + BB_\beta, \cdots$ (nach § 24) gleich Null, weil $A, B, \cdots$ nach Voraussetzung die Schwerpunkte der Vereine $A_1, \cdots, A_\alpha$; $B_1, \cdots, B_\beta, \cdots$ sind, also

$$nPS = \alpha PA + \beta PB + \cdots,$$

das heisst, S ist der Schwerpunkt zwischen α Punkten A, β Punkten B u. s. w. Also:

„Den Schwerpunkt eines Ganzen findet man aus den Schwerpunkten seiner Theile, indem man die Masse jedes Theiles in seinem Schwerpunkte vereinigt denkt, und zwischen den mit diesen Massen versehenen Schwerpunkten der Theile wieder den Schwerpunkt nimmt, so ist der letztere zugleich Schwerpunkt des Ganzen. Namentlich liegt der Schwerpunkt S zwischen zwei Punkten, A und B, welche die Massen α und β haben, so dass $AS : SB = \beta : \alpha$.“

Anm. Hieraus folgt unter Anderm, dass der Schwerpunkt einer begränzten geraden Linie in ihre Mitte fällt, dass der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche im Durchschnitt der geraden Linien liegt, welche von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogen sind, und also mit dem Schwerpunkte der Ecken zusammenfällt, ferner dass der Schwerpunkt einer Vierecksfläche in jeder der beiden geraden Linien liegt, welche die Schwerpunkte zweier Dreiecke verbindet, in die das Viereck durch eine Diagonale zerfällt.

§ 28. Es soll der Weg des Schwerpunktes eines Vereins aus den Wegen der einzelnen Punkte gefunden werden.

Es seien $A_1, \cdots, A_n$ die Punkte des Vereins, welche sich nach den Lagen $B_1, \cdots, B_n$ bewegen, so stellen die Strecken $A_1B_1, \cdots, A_nB_n$ die Wege dar, A sei der Schwerpunkt des Vereins $A_1, \cdots, A_n$, B der
11 Schwerpunkt des Vereines † $B_1, \cdots, B_n$, also die Strecke AB der Weg des Schwerpunktes, indem wir hier nämlich unter dem Wege eines Punktes stets die Strecke von der ersten Lage des Punktes bis zur letzten verstehen. Dann ist (nach § 5)

$$\begin{aligned} A_1B_1 + \cdots + A_nB_n &= (A_1A + AB + BB_1) + \cdots + (A_nA + AB + BB_n) \\ &= nAB + (A_1A + \cdots + A_nA) + (BB_1 + \cdots + BB_n). \end{aligned}$$

Aber die eingeschlossenen Summen sind (nach § 24) null, weil nach Voraussetzung A der Schwerpunkt zwischen $A_1, \cdots, A_n$, B der zwischen $B_1, \cdots, B_n$ ist, also

$$A_1B_1 + \cdots + A_nB_n = nAB,$$

oder

$$AB = \frac{1}{n}(A_1B_1 + \cdots + A_nB_n);$$

also:

„Der Weg des Schwerpunktes eines Vereins ist das Mittel aus den Wegen der einzelnen an Masse gleichen Punkte dieses Vereins, wenn man nämlich die Wege als Strecken betrachtet, und unter dem Mittel die durch die Anzahl der Grössen dividirte Summe derselben versteht.“

§ 29. Die Schlussfolge im vorigen Paragraphen bleibt noch bestehen, wenn man unter A_1B_1, A_nB_n in dem Sinne von § 3 oder § 12

die Bewegungen oder die Bewegungsänderungen versteht, in welchen die Punkte $A_1, \cdots, A_n$ in einem Augenblicke begriffen sind; also:

„Die Bewegung (oder Bewegungsänderung) des Schwerpunktes eines Vereins ist das Mittel aus den Bewegungen (oder Bewegungsänderungen) der einzelnen Punkte dieses Vereins."

§ 30. Es sei die Masse eines jeden der n Punkte $A_1, \cdots, A_n$ gleich 1 angenommen, also die Masse des ganzen Vereines gleich n, und seien $v_1, \cdots, v_n$ die Kräfte, welche auf die Punkte $A_1, \cdots, A_n$ wirken, und $A_1B_1, \cdots, A_nB_n$ die Bewegungsänderungen, so ist nach § 22

$$v_1 = A_1B_1, \cdots, \quad v_n = A_nB_n,$$

also

$$v_1 + \cdots + v_n = A_1B_1 + \cdots + A_nB_n = nAB \text{ (nach § 28)},$$

wenn AB die Bewegungsänderung des Schwerpunktes ist, also

$$AB = \frac{1}{n}(v_1 + \cdots + v_n).$$

„Die Bewegungsänderung des Schwerpunktes eines Vereins ist gleich der durch die Masse dividirten Summe aller Kräfte, die auf den Verein wirken."

§ 31. Die Kräfte, mit denen ein Punkt des Vereins auf den andern wirkt, heissen innere Kräfte des Vereins. Da nun nach § 21 die Kraft, mit der zum Beispiel A_1 auf A_2 wirkt, wenn alle Punkte gleiche Masse haben, derjenigen Kraft, mit welcher A_2 auf A_1 wirkt gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet ist, so heben sich alle inneren Kräfte bei der Addition auf. Dies auf den vorigen Satz angewandt, giebt den Satz:

„Die Bewegung des Schwerpunktes eines Vereines von Punkten ist unabhängig von den inneren Kräften des Vereins, und ist dieselbe, als ob alle Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre, und alle äusseren Kräfte auf ihn wirkten, oder (was dasselbe ist) als ob die Masse des Schwerpunktes 1 wäre, und eine Kraft auf ihn wirkte, welche in jedem Augenblicke gleich der durch die Masse dividirten Summe aller äusseren Kräfte ist." 12

Anm. Es unterliegt also die Bewegung des Schwerpunktes eines beliebigen Körpers oder Vereines von Körpern ganz den Gesetzen der Bewegung eines einzelnen Körperpunktes, während die Bewegung der übrigen Punkte, wie zum Beispiel bei einem geworfenen Stabe, eine viel verwickeltere sein kann. So gilt also zum Beispiel das Beharrungsgesetz (§ 20) unmittelbar auch für den Schwerpunkt beliebiger Vereine, namentlich wird der Schwerpunkt der ganzen Welt, da es für sie keine äusseren Kräfte giebt, entweder in Ruhe sein, oder seine Bewegung unverändert beibehalten. Das Gesetz der Gegenwirkung (§ 21) bedarf für die Schwerpunkte zweier aufeinander wirkender Vereine noch besonderen Nachweises.

§ 32. „Wenn zwei Vereine auf einander wirken, so sind die Gesammtkräfte, mit denen sie auf einander wirken, einander entgegengesetzt, und also die Bewegungsänderungen, welche sie gegenseitig ihren Schwerpunkten mittheilen, entgegensetzt gerichtet und verhalten sich ihrer Grösse nach umgekehrt wie die Massen."

Denn es sei A der Schwerpunkt des Vereins $A_1, \cdots, A_\alpha$ und B der des Vereins $B_1, \cdots, B_\beta$; diese Punkte beider Vereine mögen einzeln genommen die Massen 1, die Vereine selbst also die Massen α und β haben; a sei die Bewegungsänderung, welche der zweite Verein dem Schwerpunkte (A) des ersten mittheilt, und b die Bewegungsänderung, welche umgekehrt der erste Verein dem Schwerpunkte (B) des zweiten mittheilt, so ist zu beweisen, dass $a : b = -\beta : \alpha$.

Jeder Punkt des zweiten Vereins kann auf jeden Punkt des ersten eine Kraft üben, die Summe dieser Kräfte sei s, so ist (nach § 31)

$$a = \frac{1}{\alpha} s.$$

Die Kräfte, mit denen jeder Punkt des ersten Vereins auf jeden des zweiten wirkt, sind den Kräften, mit welchen dieser auf jenen wirkt, paarweise entgegengesetzt, indem nämlich (nach § 21) die zwischen denselben Punkten (zum Beispiel A_1 und B_n) wirkenden einander entgegengesetzt sind; folglich ist auch die Summe der Einwirkungen des ersten Vereins auf den zweiten $= -s$, somit (nach § 31)

$$b = -\frac{1}{\beta} s,$$

also $a : b = -\beta : \alpha$.

Anm. So zum Beispiel wird nicht nur ein Stück Eisen vom Magneten gezogen, sondern auch der Magnet von dem Stücke Eisen; die beiderseitigen Bewegungen haben entgegengesetzte Richtung und verhalten sich ihrer Grösse nach umgekehrt, wie die Massen. Wenn ein Stein senkrecht in die Höhe geschleudert wird, so bewegt sich zugleich die Erde nach unten, und wenn der Stein, nachdem er seine grösste Höhe erreicht hat, umkehrt, so kehrt auch die Erde um, und beide nähern sich wieder, von einander angezogen; aber die Bewegung der Erde ist in dem Verhältniss geringer als ihre Masse grösser ist, wird also ganz unspürbar sein.

13 § 33. „Die Kraft, mit welcher sich zwei Körper oder Körpertheile im Verhältnisse ihrer Massen anziehen, nennen wir Schwere (Gravitation)."

Anm. Die Art, wie diese Kraft von der Entfernung abhängt, soll späterhin nachgewiesen, und dort auch die vollständige Formel für die Wirkung dieser Kraft aufgestellt werden. Hier genügt es, zu wissen, dass unter sonst gleichen Umständen die Schwere eines Körpers sich erstens verhält, wie die anziehende Masse, und zweitens wie seine eigene Masse, so dass, wenn jene Masse im Verhältnis $1 : \alpha$ wächst, diese im Verhältniss $1 : \beta$, dann die Schwere jenes Körpers



im Verhältnisse von $1 : \alpha\beta$ wachse. Die Schwere eines Körpers auf unserer Erde ist die Summe der Kräfte, mit welchen er von allen Körperpunkten unserer Erde angezogen wird.

§ 34. „Die Bewegungsänderung, welche der Schwerpunkt eines Körpers durch die Schwere erleidet, ist von der Masse jenes Körpers unabhängig."

Denn es seien zwei Körper, deren Massen m und m_1 sind, unter sonst gleichen Umständen durch Schwere gezogen, so verhalten sich (nach § 33) die Schwerkräfte wie die Massen, also wenn mp die Schwerkraft ist, durch die der erste gezogen wird, so ist $m_1 p$ die, durch welche der zweite gezogen wird. Aber die Bewegungsänderung des Schwerpunktes ist (nach § 30) gleich der gesammten Kraft, dividirt durch die Masse, also für den ersten Körper $mp : m$, für den zweiten $m_1 p : m_1$, also für beide $= p$. Daher fallen auf der Erde, abgesehen vom Luftwiderstande, ungleich schwere Körper mit gleicher Schnelligkeit herunter, wie sich dies besonders deutlich zeigt, wenn man die Körper im luftleeren Raume fallen lässt.

§ 35. „Setzt man die Bewegungsänderung, welche die Schwere dem Schwerpunkte eines in der Nähe der Erde befindlichen Körpers mittheilt, $= 2g$, und nimmt an, dass bei der zu betrachtenden Bewegung diese Strecke $2g$ in ihrer Grösse und Richtung ungeändert bleibe, so ist die Bewegung des Schwerpunktes

$$u = \alpha + 2gt,$$

und der Träger des Schwerpunktes

$$p = \beta + \alpha t + gt^2,$$

wo α die Anfangsbewegung und β der Anfangsträger ist."

Denn für die Bewegung des Schwerpunktes gelten (nach § 31) dieselben Gesetze, wie für die eines einzelnen Körperpunktes; also erhält man auch (nach §§ 17, 18) aus der Bewegungsänderung die Bewegung durch Integration und den Träger durch zweimalige Integration, also aus $v = 2g$ die obigen Gleichungen für u und p.

Anm. Die Annahme, dass die Schwere bei der Fortbewegung in Grösse und Richtung ungeändert bleibe, gilt nur annähernd, da sie in grösserer Höhe abnimmt, und die Richtung an verschiedenen Orten der Erdoberfläche verschieden ist. Nimmt man den Anfangspunkt der Träger im Anfangspunkte der Bewegung an, so wird der Anfangsträger $\beta = 0$. Wenn α null oder mit g parallel ist, wird die Bahn eine gerade Linie, wenn dagegen α mit g einen Winkel bildet, so ist die Bahn eine krumme Linie, welche man Parabel nennt. Sie lässt sich nach der obigen Formel für p unmittelbar konstruieren, denn die einzelnen Punkte erhält man dadurch, dass man in dieser Formel statt t einzelne Werthe, zum Beispiel 1, 2, 3, . . . setzt. Wenn $\alpha = 0$ ist, so nennt man die durch die Schwere hervorgerufene † Bewegung den Fall, ist α nicht null, so nennt man sie den Wurf. 14
Die Formel für den Fall der Körper erhält man also, indem man $\alpha = 0$ setzt, auch kann man, wie erwähnt, $\beta = 0$ setzen.

§ 36. „Die Formeln für den Fall der Körper sind

$$u = 2gt,$$
$$p = gt^2,$$

wo p den ganzen Weg bezeichnet."

§ 37.*) Setzt man in § 36 statt t nach und nach die Werthe

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \cdots,$$

so erhält man für u nach und nach die Werthe

$$2g, \; 4g, \; 6g, \; 8g, \; 10g, \cdots$$

und für p

$$g, \; 4g, \; 9g, \; 16g, \; 25g, \cdots.$$

Subtrahirt man in dieser letzten Reihe jedes Glied von dem nächstfolgenden, so erhält man die Wege in den einzelnen Sekunden, diese sind also nach der Reihe

$$g, \; 3g, \; 5g, \; 7g, \; 9g, \cdots.$$

Also:

„Beim Falle verhalten sich die Wege in den einzelnen Sekunden wie die ungraden Zahlen, die Geschwindigkeiten am Schlusse der einzelnen Sekunden wie die geraden Zahlen, die ganzen Wege wie die Quadratzahlen, und zwar erhält man die Werthe selbst, wenn man diese Zahlen mit g, dem Wege in der ersten Sekunde, multiplicirt. Durch Beobachtung hat man g (im Mittel) gleich

$$15^5/_8 = {}^{125}/_8 = ({}^5/_2)^3 = {}^{1000}/_{64}$$

preussische Fuss gefunden."

Anm. In neueren Werken hat man nach dem Vorgange der französischen Mathematiker diese althergebrachte Bestimmung, nach welcher g den Fallraum in der ersten Sekunde bezeichnet, vielfach dahin abgeändert, dass man unter g das Doppelte dieses Fallraums, also die Bewegungsänderung versteht, eine Neuerung, die nicht zu billigen ist. Die Grösse des Fallraums ist auf der Oberfläche der Erde nicht überall gleich; der Grund der Ungleicheit liegt nicht nur in der elliptischen Gestalt der Erde, sondern viel mehr in der Umdrehung der Erde um ihre Axe, indem die dadurch bewirkte Schwungkraft der Schwerkraft entgegenwirkt.

§ 38. Aus den Formeln § 36 findet man sogleich:

$$„u^2 = 4pg,$$

wo u die Geschwindigkeit eines von der Höhe p herabgefallenen Körpers bezeichnet."

§ 39. Wenn wir die Strecken, welche in den Formeln von § 35 vorkommen, auf eine lothrechte (mit g parallele) gerade Linie, und auf

---

*) In den §§ 37—42 sind mehrmals Strecken und ihre Längen mit denselben Buchstaben bezeichnet. (A. d. H.)



die wagrechte (gegen g senkrechte) Ebene projiciren, so wird jede dieser Strecken die Summe ihrer Projektionen, also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $u = u_1 + u_2$, $p = p_1 + p_2$, wo α_1, u_1, u_2 lothrechte, α_2, u_2, p_2 wagerechte Richtung haben; und setzen wir dann noch den Anfangsträger null, so erhalten wir

$$u_1 + u_2 = (\alpha_1 + 2gt) + \alpha_2$$
$$p_1 + p_2 = (\alpha_1 t + gt^2) + \alpha_2 t,$$

indem wir die lothrechten Stücke durch eine Klammer zusammengefügt haben. In jeder † dieser Gleichungen müssen die wagrechten Glieder 15 auf beiden Seiten gleich sein und ebenso die lothrechten (als Katheten kongruenter rechtwinkliger Dreiecke). Somit erhält man

$$„u_1 = \alpha_1 + 2gt, \quad u_2 = \alpha_2,$$
$$p_1 = \alpha_1 t + gt^2, \quad p_2 = \alpha_2 t,$$

wo α_1 der lothrechte Theil der Bewegung des Schwerpunktes zur Zeit 0, α_2 der wagrechte; u_1 der lothrechte Theil der Bewegung zur Zeit t, u_2 der wagrechte, und wo p_1 der lothrechte Theil des gesammten Weges (der Strecke von der ersten bis zur letzten Lage des Schwerpunktes), p_2 der wagrechte ist, und nur die Schwere $2g$ als wirkend angenommen wird.“

§ 40. Es soll die Weite (e) des Wurfes auf wagrechter Ebene gesucht werden, wenn die Anfangsbewegung bekannt ist.

Es sei c die Anfangsgeschwindigkeit und γ der Winkel, welchen die Anfangsbewegung mit ihrer Projektion auf die wagrechte Ebene bildet, so findet man für die Einführung in die Formeln § 39

$$\alpha_2 = c \cos \gamma, \quad \alpha_1 = -c \sin \gamma,$$

wo das negative Zeichen genommen ist, weil α_1 mit g entgegengesetzt gerichtet ist, ferner:

$$p_1 = 0,$$
$$p_2 = e.$$

Indem nämlich der Körper (genauer sein Schwerpunkt) von der wagrechten Ebene ausgehen und am Schlusse seines Weges wieder in die wagrechte Ebene zurückkehren soll, so ist $p_1 = 0$, und p_2 die Weite des Wurfes $= e$. Somit folgt aus

$$p_1 = \alpha_1 t + gt^2$$

die Formel

$$0 = -c \sin \gamma \,.\, t + gt^2,$$

oder

$$gt^2 = c \sin \gamma \,.\, t,$$

folglich, da $t = 0$ ausgeschlossen ist,

$$gt = c \sin \gamma$$

oder

$$t = c \sin \gamma : g.$$

Somit verwandelt sich die Gleichung

$$p_2 = \alpha_2 t$$

in

$$e = c \cos \gamma \cdot t = c^2 \sin \gamma \cos \gamma : g = c^2 \,.\, 2 \sin \gamma \cos \gamma : 2g,$$

oder da

$$2 \sin \gamma \cos \gamma = \sin 2\gamma$$

ist, in

$$e = c^2 \sin 2\gamma : 2g.$$

Also:

„Wenn ein Körper von einer wagrechten Ebene aus in einer gegen diese Ebene unter dem Winkel γ geneigten Richtung mit der Geschwindigkeit c emporgeworfen wird, so ist die Entfernung (e) des Punktes, in welchem er wieder dieselbe wagrechte Ebene erreicht,

$$e = \frac{c^2 \sin 2\gamma}{2g}$$

und die Zeit t, welche er gebraucht, um dies Ziel zu erreichen,

$$t = \frac{c \sin \gamma}{g} \,.\text{“}$$

§ 41. Es soll in gleichem Falle die grösste Höhe (h), die der geworfene Körper erreicht, gesucht werden. Der Körper steigt, so lange noch u_1 negativ ist, er sinkt sobald u_1 positiv wird; er erreicht also seine grösste Höhe, wenn $u_1 = 0$ ist. Dies giebt aus $u_1 = \alpha_1 + 2gt$ (§ 39) die Formel: $0 = -c \sin \gamma + 2gt$, also $t = c \sin \gamma : 2g$ und also (aus § 39)

16 $$p_1 = \alpha_1 t + gt^2 = -ct \sin \gamma + gt^2.$$

Führt man hier den gefundenen Werth von t ein, so erhält man

$$p_1 = -\frac{c^2 \sin^2 \gamma}{4g},$$

also

$$h = \frac{c^2 \sin^2 \gamma}{4g},$$

da man nur den positiven Werth dieser Höhe sucht. Also:

„Wenn ein Körper in einer Richtung, welche gegen die wagrechte Ebene unter dem Winkel γ geneigt ist, mit der Geschwindigkeit c empor geworfen wird, so ist die grösste Höhe (über der wagerechten Ebene, von der er ausging), zu der er aufsteigt,

$$h = \frac{c^2 \sin^2 \gamma}{4g},$$

und die Zeit, in welcher er diese Höhe erreicht,

$$t = \frac{c \sin \gamma}{2g}.\text{“}$$

Anm. Vergleicht man § 40, so zeigt sich, dass der Körper zum Steigen dieselbe Zeit gebraucht, wie zum Herabsinken bis zu derselben wagrechten Ebene, von der er ausging. Die Parabel, welche er dabei beschreibt, stellt sich besonders anschaulich dar, wenn man sie von ihrem höchsten Punkte aus konstruirt. Ist der Wurf ein lothrechter, so wird $\gamma = 90^0$, also $\sin \gamma = 1$, $\sin 2\gamma = 0$, und die Formeln $h = c^2 : 4g$, $t = c : 2g$ stimmen dann mit den Formeln § 38 und § 36.

§ 42. Wie muss die Wurfbewegung im Anfange gerichtet sein, wenn ihre Geschwindigkeit (c) bekannt ist, und ein Ziel getroffen werden soll, dessen Entfernung e ist, und welches, von dem Anfangspunkte des Wurfes aus betrachtet, sich gegen die wagrechte Ebene um den Winkel δ erhebt? Man hat, wenn γ die obige Bedeutung beibehält, für die Einführung in die Gleichungen § 39 die Werthe

$$\alpha_1 = -c \sin \gamma, \quad \alpha_2 = c \cos \gamma,$$
$$p_1 = -e \sin \delta, \quad p_2 = e \cos \delta.$$

somit verwandeln sich die Formeln

$$p_1 = \alpha_1 t + g t^2, \quad p_2 = \alpha_2 t$$

in

$$-e \sin \delta = -c \sin \gamma \,.\, t + g t^2$$
$$e \cos \delta = c \cos \gamma \,.\, t.$$

Aus der zweiten folgt

$$t = \frac{e \cos \delta}{c \cos \gamma}.$$

Dadurch verwandelt sich die erste, nachdem man mit e gehoben hat, in

$$-\sin \delta = -\frac{c \sin \gamma \cos \delta}{c \cos \gamma} + \frac{g e \cos^2 \delta}{c^2 \cos^2 \gamma},$$

also, indem man mit $c^2 \cos^2 \gamma$ multiplicirt, und die Glieder mit c^2 auf die linke Seite gebracht und c^2 herausgezogen hat,

$$c^2 (\sin \gamma \cos \gamma \cos \delta - \cos^2 \gamma \sin \delta) = g e \cos^2 \delta.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit 2, und bedenkt, dass

$$2 \sin \gamma \cos \gamma = \sin 2\gamma, \quad 2 \cos^2 \gamma = 1 + \cos 2\gamma$$

ist, so erhält man

$$c^2 (\sin 2\gamma \cos \delta - \cos 2\gamma \sin \delta - \sin \delta) = 2 g e \cos^2 \delta, \qquad 17$$

also

$$c^2 \sin (2\gamma - \delta) = 2 g e \cos^2 \delta + c^2 \sin \delta.$$

„Wenn das Geschütz sich gegen die wagrechte Ebene unter dem Winkel γ erhebt und das Geschoss die Anfangsgeschwindigkeit c hat, das zu treffende Ziel aber vom Standpunkte des Geschützes um e ent-

fernt ist, und sich das Ziel von diesem Standpunkte aus um den Winkel δ erhebt, so besteht zwischen diesen Grössen die Gleichung

$$c^2 \sin(2\gamma - \delta) = 2ge \cos^2\delta + c^2 \sin\delta.\text{“}$$

Anm. Wird $\delta = 0$, so geht die Formel § 40 hervor, [wird δ negativ, so kehrt sich das Zeichen auf der linken und rechten Seite um].*) Alle diese Formeln gelten für den Wurf in der Luft nicht mehr genau, da der Luftwiderstand bedeutende Abweichungen hervorruft. In grösseren Entfernungen, wie sie zum Beispiel die Himmelskörper von einander haben, hat man auf die Veränderung der Richtung und Grösse der Schwerkraft Rücksicht zu nehmen, um die Bahnen der Himmelskörper ableiten zu können. Die Gesetze, nach denen sich diese Bahnen, namentlich die der Planeten, richten, sind zuerst von Kepler (um 1610) entdeckt worden.

§ 43. Die Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung sind folgende:

1) „Der Träger, der von der Sonne nach dem Planeten gezogen wird, beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.“

2) „Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.“

Die Ellipse ist nämlich die Projektion eines Kreises, und Brennpunkte sind die Punkte, in welchen der grösste Durchmesser der Ellipse von einem Kreise geschnitten wird, dessen Mittelpunkt im Endpunkte eines kleinsten Halbmessers der Ellipse liegt, und dessen Halbmesser gleich dem grössten Halbmesser der Ellipse ist.

3) „Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Würfel der mittleren Entfernungen von der Sonne.“

Diese mittleren Entfernungen sind zugleich die grössten Halbmesser der Ellipsen, also $\tau^2 : \tau_1^2 = a^3 : a_1^3$, wenn τ und τ_1 die Umlaufszeiten zweier Planeten und a und a_1 die grössten Radien der beiden Ellipsen sind, in denen sie sich bewegen.

Anm. Newton hat diese Gesetze, so wie alle grösseren und kleineren Abweichungen, welche durch die gleichzeitige Bewegung der Sonne und durch die Störungen benachbarter Weltkörper bedingt sind, aus den obigen drei Gesetzen abgeleitet, indem er nur noch das Gesetz zu Hülfe nahm, dass die Schwerkraft abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt. Von der Art, wie man nach Newtons Methode dies Gesetz und dann die übrigen Erscheinungen ableiten kann, soll im Folgenden ein Bild gegeben werden. Zunächst soll der erste Kepler'sche Satz in allgemeinerer Form bewiesen werden.

§ 44. „Wenn die Kraft, welche auf einen sich bewegenden Punkt wirkt, stets nach einem festen Punkte hingerichtet ist, so beschreibt der von dem letzteren nach dem ersteren gezogene Träger in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.“

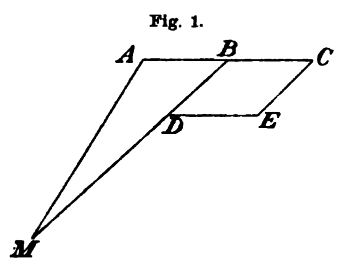
Es sei M der feste Punkt, P der sich bewegende, und sei die Kraft zuerst als eine nur stossweise wirkende angenommen, so nämlich,

*) Die eingeklammerte Stelle ist unklar ausgedrückt. (A. d. H.)



dass die aufeinander folgenden Stösse durch gleiche Zeiträume getrennt sind. In irgend einem solchen Zeitraume (τ) † möge der Punkt P 18 den Weg AB machen. {Fig. 1.} Wenn nun in B keine Kraft wirkte, so würde er (nach § 20) in dem nächstfolgenden gleichen Zeitraume (τ) eine gleiche (also auch gleichgerichtete) Strecke BC zurücklegen. Nun sei die Kraft, welche in dem Augenblicke, wo der Punkt P in B angelangt ist, auf ihn wirkt, so gross, dass durch sie, wenn der Punkt nicht schon in Bewegung wäre, in dem nächstfolgenden Zeitraume der nach M hin gerichtete Weg BD zurückgelegt werden würde, so wird vermöge beider Ursachen (nach § 23) der Weg $BC + BD$ zurückgelegt. Man vollende das Parallelogramm $DBCE$, so ist die Strecke $BE = BC + BD$, also BE der wirkliche Weg in dem zweiten Zeitraume. Nun beschreibt der Träger in dem ersten Zeitraume den Flächenraum des Dreiecks MAB, in dem zweiten, ebenso so grossen Zeitraume, den Flächenraum des Dreiecks MBE, beide aber sind dem Flächenraume des Dreiecks MBC gleich, da MAB mit MBC gleiche Grundseite $AB = BC$ und gleiche Höhe (das Loth von M auf die gerade Linie AB), und da MBE mit MBC gleiche Grundseite MB und gleiche Höhe (die Entfernung der beiden Parallelen MB und CE hat. Somit sind auch jene ersten beiden Flächenräume gleich. Es beschreibt also der Träger in jenen beiden gleichen Zeiträumen, also auch überhaupt in gleichen Zeiträumen gleiche Flächenräume. Dies gilt, in wie kurzen Zwischenräumen auch die Stösse auf einander folgen, also auch, wenn diese Stösse unmittelbar auf einander folgen, das heisst die Kraft stetig wirkt.

Fig. 1.



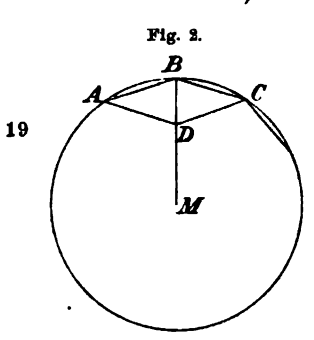
Anm. Hierbei ist es gleichgiltig, ob P ein Körperpunkt oder der Schwerpunkt eines Körpers ist. Wenn der Punkt M nicht fest ist, sich aber gleichmässig bewegt, so gilt der Satz noch, wenn man statt des Trägers MP einen gleichen (also auch gleichgerichteten) Träger $M'P'$ von einem festen Punkte M' aus zieht und die von diesem letzteren beschriebenen Flächenräume betrachtet. Stellt man sich nun zwei Weltkörper vor, welche ungestört von den übrigen sich bewegen, so dass also der Verein beider von keiner äusseren Kraft gezogen wird, so ist nach § 31 die Bewegungsänderung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes beider gleich Null; und es kann also dieser Schwerpunkt in dem eben angegebenen Sinne als feststehend betrachtet werden. Findet nun die gegenseitige Anziehung beider in der geraden Linie, welche ihre Schwerpunkte verbindet, statt, was bei der grossen Entfernung und der nahe kugelförmigen Gestalt der Himmelskörper in dem Grade genau angenommen werden kann, dass eine Abweichung davon sich jeder Beobachtung entzieht, so wird, da der gemeinschaftliche Schwerpunkt (nach § 27) auch in dieser Verbindungslinie liegt, die Voraus-

setzung unseres Satzes erfüllt, und also der von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunkte nach dem Schwerpunkte eines jeden gezogenen Trägers in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreiben.

§ 45. Es soll die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit eines Punktes und der auf ihn wirkenden, nach einem festen Punkte M gerichteten Kraft gefunden werden, wenn der Punkt P mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis um den festen Punkt M beschreiben soll.

Zunächst stelle man sich statt des Kreises ein regelmässiges Vieleck vor, dessen Umfang von P mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird, und dessen Mittelpunkt M sei. {Fig. 2.} Es seien

Fig. 2.



19

AB und BC zwei Seiten des regelmässigen Vielecks, und sei die Raute $ABCD$ vollendet, so hat BD die Richtung nach M zu, und das Dreieck ABD ist † ähnlich dem Dreieck MAB; es verhält sich also $BM : AB = AB : BD$, das heisst $AB^2 = BM \,.\, BD$. Damit nun der Umfang des Vielecks mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werde, muss die Kraft stossweise wirken. Denn während der Punkt P zum Beispiel von A nach B gleichmässig fortschreitet, kann keine Kraft auf ihn wirken, weil keine Bewegungsänderung stattfindet. Es sei etwa τ die Zeit, in welcher AB durchlaufen wird. In dem Augenblicke, wo er in B angelangt ist, muss nun eine Kraft wirken, vermöge deren er in dem nächsten Zeitraume τ statt eines mit AB gleichen und gleichgerichteten Weges den Weg BC zurücklegt; da nun die Strecke $BC = AB + BD$ ist, so muss die Kraft, die in B wirkt, so gross sein, dass sie in der Zeit τ die Bewegungsänderung BD hervorrufen würde. Ist nun $\tau = 1$ Sekunde, so ist AB (nach § 3) die Bewegung (Geschwindigkeit), welche der Punkt P in jedem Augenblicke, während er von A nach B sich bewegt, hat, und BD die Bewegungsänderung, die er in B erfährt; also da $AB^2 = BM \,.\, BD$ war, so ist die Geschwindigkeit (AB) die mittlere Proportionale zwischen der Bewegungsänderung (BD) und dem grossen Halbmesser (BM). Ist aber $\tau = \frac{1}{n}$ Sekunde, so ist die Bewegung (Geschwindigkeit) u gleich nAB, und die Aenderung, welche diese Bewegung nAB in einer $\frac{1}{n}$ Sekunde erleidet, $= nBD$, also die Aenderung, welche die Bewegung in einer ganzen Sekunde erleiden würde, wenn jene Aenderung sich in der ganzen Sekunde gleichmässig fortsetzte, n-mal so gross, das heisst $n^2 BD$; also $u = nAB$, $v = n^2 BD$, also noch immer $u^2 = v \,.\, BM$ oder $= vr$, wenn r den grossen Halbmesser des Vielecks bezeichnet. Diese Gleichung gilt, wie klein auch die Seiten des regel-

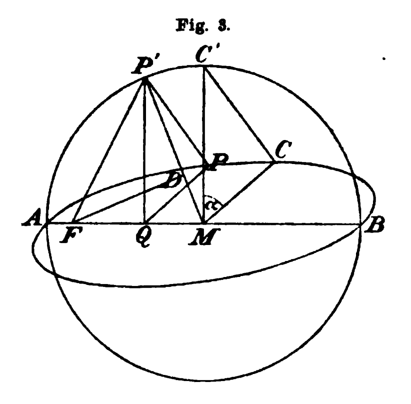
mässigen Vielecks sein mögen, also auch, wenn dies in einen Kreis übergeht, also:

„Wenn ein Punkt sich in einem Kreisumfange mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen soll, so muss die Kraft nach dem Mittelpunkte hingerichtet und die Geschwindigkeit die mittlere Proportionale sein zwischen dem Halbmesser des Kreises und der Bewegungsänderung, welche durch die Kraft hervorgerufen wird."

Anm. Setzt man die Masse des bewegten Punktes = 1, so kann man (nach § 19) statt der Bewegungsänderung auch die Kraft selbst setzen. Wenn die Kraft zwar nicht nach dem Mittelpunkte M gerichtet ist, aber sie sich (nach § 23) in zwei Kräfte zerlegen lässt, von denen die eine in der Richtung der Tangente wirkt, die andere aber nach dem Mittelpunkte M gerichtet ist und in jedem Augenblicke (die Masse des bewegten Punktes 1 gesetzt) die dritte Proportionale zu dem Halbmesser und der in diesem Augenblicke stattfindenden Geschwindigkeit ist, so wird der Punkt P auch in diesem Falle noch einen Kreis um M beschreiben, vorausgesetzt, dass seine Bewegung in irgend einem Augenblicke die Richtung der Tangente an diesem Kreise hat. Denn die Tangentialkraft ändert nur die Geschwindigkeit, aber nicht die Bahn des Punktes. Also:

§ 46. „Damit ein Punkt P, dessen Masse 1 ist, eine Kreisbahn um den Mittelpunkt M beschreibe, ist nothwendig und hinreichend, dass er sich in irgend einem Augenblicke in der Tangente an dieser Bahn bewege, in jedem Augenblicke aber die Projektion † (v') der Kraft auf den Radius MP die dritte Proportionale sei zu dem Radius (r) und der Geschwindigkeit (u), also $r : u = u : v'$ sei." 20

Anm. Es versteht sich nach dem Früheren, dass der Satz auch gilt, wenn P der Schwerpunkt eines Körpers von der Masse m ist, nur dass man dann (nach § 31) statt der Kraft die durch die Masse dividirte Summe aller äusseren Kräfte setzen muss. Wir suchen nun nach Newton's Vorgange das Gesetz, nach welchem die Kraft sich mit der Entfernung von dem anziehenden Punkte ändern muss, damit der angezogene Punkt eine Ellipse beschreibe, in deren einem Brennpunkte der anziehende Punkt liegt. (Vergl. Moebius in Crelle Bd. 31, S. 174 {Ges. Werke Bd. 4, S. 319.})



§ 47. Man stelle sich vor, dass der Punkt P {Fig. 3} sich in einer Ellipse bewege, während er von einer Kraft gezogen wird, die stets nach dem einen Brennpunkte F der Ellipse hingerichtet ist. Die Masse des sich bewegenden Punktes sei = 1 angenommen. Die Ellipse ist Projektion eines Kreises. Es sei die von P beschriebene Ellipse die (stets durch senkrechte Linien bewirkte) Projektion eines Kreises, dessen Ebene

die Ebene der Ellipse in einer geraden Linie schneide, in welcher der Durchmesser AB des Kreises und also auch sein Mittelpunkt M liegt. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen sei α. Errichtet man also in P ein Loth auf der Ebene der Ellipse, so geht dies fortwährend durch einen Punkt im Umfange jenes Kreises. Dieser Punkt heisse P', so dass also P' den Kreisumfang durchläuft, während P den Umfang der Ellipse durchläuft. Fällt man das Loth PQ auf AB und vollendet das Dreieck PQP', so ist auch $P'Q$ auf AB senkrecht und

$$\sphericalangle PQP' = \alpha;$$

also

(1) $$PP' = P'Q \sin \alpha, \quad QP = P'Q \cos \alpha,$$

wenn nur die Längen dieser Seiten betrachtet werden. Da bei der Projektion alle mit AB parallelen Strecken unverändert bleiben, alle zu AB senkrechten ihre Längen im Verhältnisse von $1 : \cos \alpha$ ändern, aber zu AB senkrecht bleiben, so verändern sich alle Flächenräume gleichfalls im Verhältnisse von $1 : \cos \alpha$. Namentlich, wenn $\frac{1}{2} f^2$ der Flächenraum ist, den der Träger FP in der Zeiteinheit beschreibt, und $\frac{1}{2} f'^2$ der, den FP' beschreibt, so ist

(2) $$f^2 : f'^2 = \cos \alpha : 1.$$

Es sei MA mit a bezeichnet, der gegen MA senkrechte (kleinste) Halbmesser der Ellipse, MC sei mit b bezeichnet, und das Loth CC', was auf der Ebene der Ellipse errichtet ist, und den Kreisumfang in C' trifft, mit e, wo aber a, b, e blosse Längen (nicht zugleich die Richtungen) bezeichnen, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck MCC' (wie oben gezeigt) $\sphericalangle CMC' = \alpha$

(3) $$b = a \cos \alpha, \quad e = a \sin \alpha, \quad b^2 + e^2 = a^2.$$

Nun liegt (nach § 43. 2) der Brennpunkt F in einem Kreise, der um C mit a geschlagen ist, also ist in dem rechtwinkligen Dreieck CMF, $MF^2 = a^2 - b^2 = e^2$ (nach (3)), also

(4) $$MF = e.$$

Fällt man nun von F auf $P'M$ das Loth FD, so ist $\triangle MDF \backsim MQP'$, 21 also † $FD : MF = P'Q : MP'$, das heisst $FD : e = P'Q : a$ oder

$$FD = \frac{e}{a} P'Q = P'Q \sin \alpha = PP' \text{ (nach (1))}.$$

Also $FD = PP'$; folglich sind nun auch die rechtwinkligen Dreiecke $P'DF$ und FPP' einander kongruent, weil sie ausser der gemeinschaftlichen Hypotenuse $P'F$ auch die gleichen Katheten FD und $P'P$ haben, also

(5) $$P'D = FP = r,$$

indem wir die Länge des Trägers FP mit r bezeichnen, und alle diese Gleichungen nur auf die Länge der genannten Linien beziehen. Ziehen wir nun noch an dem Kreise in P' die Tangente $P'R'$ und machen sie gleich lang der Geschwindigkeit u', welche der Punkt P' im Kreise hat, so ist der von dem Träger FP' in einer Sekunde beschriebene Flächenraum, den wir $= \frac{1}{2} f'^2$ gesetzt hatten,

$$= \tfrac{1}{2} R'P' . P'D = \tfrac{1}{2} R'P' . r,$$

also

$$f'^2 = u'r. \tag{6}$$

Ist nun v' die nach F gerichtete Kraft, mit welcher P' sich bewegt, v die nach F gerichtete Kraft, mit welcher P sich bewegt, und k die Projektion der ersteren auf $P'M$, so ist erstens (nach § 46)

$$u'^2 = ak; \tag{7}$$

ferner ist v die Projektion von v' auf die Ebene, und da v die Richtung von PF, v' die von $P'F$ hat, so verhält sich

$$v : v' = PF : P'F = r : P'F,$$

aber auch, da k die Projektion von v' auf $P'D$ ist, und v' die Richtung von $P'F$ hat, $k : v' = P'D : P'F = r : P'F$ (nach (5)). In diesen beiden Proportionen $v : v' = r : P'F$ und $k : v' = r : P'F$ sind drei entsprechende Glieder gleich, also ist $k = v$, und die Gleichung (7) verwandelt sich in

$$u'^2 = av. \tag{8}$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit r^2, und setzen statt $u'r$ seinen Werth f'^2 (aus 6) oder $f^2 : \cos\alpha$ (aus 2), so erhalten wir

$$\left(\frac{f^2}{\cos\alpha}\right)^2 = avr^2. \tag{9}$$

Setzen wir endlich für $\cos\alpha$ seinen Werth $b : a$ aus (3), so wird $f^4 a^2 : b^2 = avr^2$, oder bezeichnet man $b^2 : a$ mit p (Parameter der Ellipse), so erhält man

$$f^4 = pvr^2 \quad \text{oder} \quad v = \frac{f^4}{pr^2}. \tag{10}$$

Hier ist ausser der Kraft v nur die Entfernung r des Punktes P vom Brennpunkt F der Ellipse veränderlich. Also:

„Damit ein Punkt P in einer Ellipse sich bewege, in deren einem Brennpunkt F der anziehende Punkt sich befinde, ist nothwendig, dass die anziehenden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die {Quadrate der} Entfernungen des angezogenen Punktes vom anziehenden; und † zwar muss dann die Bewegungsänderung (v) jenes Punktes erhalten werden, indem man das Doppelte (f^2) des Flächenraums, den der Träger FP in einer 22

Sekunde beschreibt, aufs Quadrat erhebt, und dies Quadrat durch den Parameter (p) der Ellipse und durch das Quadrat des Trägers dividirt. Und umgekehrt, wenn die Bewegungsänderung stets diese Grösse und die Richtung von PF hat, und in irgend einem Augenblicke P in dem Umfange der Ellipse und also in der Richtung der Tangente an der Ellipse sich bewegt, so muss der Punkt auch stets im Umfange der Ellipse bleiben."

Anm. Der letzte Theil des Satzes folgt nämlich sogleich aus § 16. Es zeigt sich also, dass auch umgekehrt, wenn die Schwere sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, das zweite Kepler'sche Gesetz sich als notwendig ergiebt.

§ 48. Die Umlaufszeit (τ) ist gleich dem ganzen Flächenraum der Ellipse, dividirt durch den in der Zeiteinheit von dem Träger beschriebenen Flächenraum. Aus der Beweisführung in § 47 (zu Formel (2)) folgt, dass der Inhalt der Ellipse aus dem Inhalt des Kreises, dessen Projektion sie ist, erhalten wird, indem man diesen mit dem Cosinus des Projektionswinkels multiplicirt. Also wenn man die im § 47 gewählten Bezeichnungen beibehält so ist der Inhalt der Ellipse $= a^2\pi \cos\alpha$ (nach § 47, (3)) $= ab\pi$, somit wird, wenn $\frac{1}{2}f^2$ der in der Zeiteinheit beschriebene Flächenraum ist,

$$\tau = 2ab\pi : f^2$$

oder

$$\tau^2 = 4a^2b^2\pi^2 : f^4,$$

aber nach § 47 ist $v = f^4 : pr^2$, also $f^4 = vpr^2$, somit

$$\tau^2 = \frac{4a^2b^2\pi^2}{pvr^2} = \frac{4a^3\pi^2}{vr^2},$$

weil $p = b^2 : a$, also $b^2 = ap$ ist. Nun ist die durch die Schwere bewirkte Bewegungsänderung (nach § 34) unabhängig von der bewegten Masse, und wenn der anziehende Körper (beim Planetensysteme die Sonne) derselbe ist, so wird auch für verschiedene angezogene Körper (Planeten) sich

$$v : v_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1{}^2} = r_1{}^2 : r^2$$

verhalten, das heisst vr^2 ist eine unveränderliche Grösse; diese sei mit $\varkappa$ bezeichnet, so ist

$$\tau^2 = \frac{4a^3\pi^2}{\varkappa}.$$

Hier sind für die verschiedenen angezogenen Körper nur τ und a veränderlich; somit ergiebt sich auch das dritte Kepler'sche Gesetz als nothwendig.

Anm. Wir haben bei diesen Entwickelungen § 47 und § 48 angenommen, dass der anziehende Körper in dem festen Brennpunkte der Ellipse stände. Dies

ist nicht genau richtig, da der feste Punkt der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Sonne und des Planeten ist. Wenn die Masse des Planeten μ ist, die Masse der Sonne als 1 angenommen, so liegt der gemeinschaftliche Schwerpunkt (F) der Sonne (S) und des Planeten (P) zwischen S und P so, dass die Entfernungen beider von F im umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen stehen, also $PF : FS = 1 : \mu$, also $PF : PS = 1 : 1 + \mu$ sich verhält. Will man also statt $PF = r$ die Entfernung $PS = r_1$ einführen, so hat man $r_1 = r(1 + \mu)$, was dann für v die Formel giebt

$$v = \frac{f^4 (1 + \mu)^2}{p r_1^{\,2}}. \qquad 23$$

Und will man ebenso in § 48 die mittlere Entfernung (a_1) des Planeten P von der Sonne statt der mittleren Entfernung (a) desselben von F einführen, so erhält man, wenn man genauer $v r_1^{\,2}$ konstant $= \varkappa_1$ setzt:

$$\tau^2 = \frac{4 a_1^{\,3} \pi^2}{\varkappa_1 (1 + \mu)}$$

als die genauere Formel, durch welche das dritte Kepler'sche Gesetz eine kleine Aenderung erleidet, da auch μ von einem Planeten zum andern sich ändert.

§ 49. Das Gesetz der Schwere (Gravitation) lässt sich (nach § 33 und § 47) in der Form darstellen

$$k = \lambda \frac{m m_1}{r^2},$$

„wo k die Kraft ist, mit welcher zwei Punkte, welche die Massen m und m_1 und die gegenseitige Entfernung r haben, sich durch Schwere einander anziehen (und λ die Kraft ist, mit der sie sich anziehen würden, wenn ihre Massen und ihre Entfernung gleich 1 wären)."

Anm. Die entwickelten Sätze sind die wichtigsten und allgemeinsten Sätze über die Bewegung des Schwerpunktes eines Vereins. Für die Bewegung der sämmtlichen übrigen Punkte des Vereins sollen im Folgenden die allgemeinsten Sätze aufgestellt werden, zu deren Begründung und einfacher Darstellung noch die Multiplikation der Strecken genauer festzusetzen ist.

Dritter Abschnitt.

Flächenbewegung und Arbeit eines Vereins.

§ 50. Wenn a und b Strecken sind, so versteht man unter dem äusseren Produkte $[ab]$ den Flächenraum des Parallelogramms, dessen erste Seite $= a$ und dessen zweite (sich daran anschliessende) Seite $= b$ ist; und zwar werden zwei solche Flächenräume $[ab]$ und $[cd]$ einander gleichgesetzt, wenn sie in parallelen Ebenen liegen, gleichen Inhalt haben, und gleichbezeichnet sind, das heisst, die zweite Seite (b, d) von der ersten (a, c) aus betrachtet nach derselben (rechten oder linken) Seite hin liegt, in jedem andern Falle verschieden. Entgegengesetzt bezeichnet sind sie, wenn sie zwar in parallelen Ebenen liegen,

aber die zweite Seite von der ersten aus betrachtet in dem einen Parallelogramm nach rechts, in dem andern nach links hin liegt. Namentlich ist $[ab] = -[ba]$. Ferner $[ab] = 0$, wenn a mit b parallel ist, also $[bb]$ stets null.

Anm. Wenn die Strecke $a = AB$, $b = BC$, und $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so ist $[ab]$ in dem angegebenen Sinne gleich dem Inhalte des Parallelogrammes $ABCD$. Die zweite Seite b liegt von der ersten a aus betrachtet nach links, wenn man nach links hin abbiegen muss, um von A über B nach C zu kommen. Die das Produkt einschliessende Klammer ist gewählt, um das Produkt von dem algebraischen zu unterscheiden. Dass die äusseren Produkte gleich sind, wenn ihre entsprechenden Faktoren gleiche Strecken sind, liegt unmittelbar in der Erklärung. Inwiefern die weiteren Gesetze der äusseren Multiplikation mit denen der Algebra übereinstimmen, werden die folgenden zwei Nummern zeigen.

§ 51. Für die äussere Multiplikation gelten die Gesetze

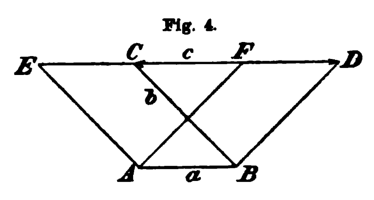
24

$$[a(b+c)] = [ab] + [ac]$$
$$[(b+c)a] = [ba] + [ca]$$

und zwar ist die erstere Formel, wenn die Flächenräume $[ab]$ und $[ac]$ nicht in einer Ebene liegen, als Erklärung der Summe solcher Flächenräume aufzufassen.

Um die erstere Formel für den Fall, dass a, b, c in einer Ebene liegen, zu beweisen, sei $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ gesetzt. Alsdann sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem CD mit AB parallel, oder sich (in der Richtung von C nach D) von der Linie AB entfernt oder sich ihr nähert. Im ersten Falle {Fig. 4} ist $[ac] = 0$ (nach § 50), weil $a = AB$ mit $c = CD$ parallel ist.

Fig. 4.



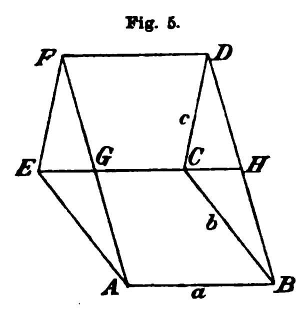
Vollendet man dann die Parallelogramme $ABCE$ und $ABDF$, so sind sie von gleicher Grundseite und Höhe, also an Inhalt gleich, aber auch gleichbezeichnet, also (nach § 50) gleiche Flächenräume. Also da $ABCE = [ab]$, $ABDF = [a(b+c)]$

$$[ab] + [ac] = [ab] = [a(b+c)].$$

Im zweiten Falle {Fig. 5} seien die Parallelogramme $ABCE$, $ECDF$, $ABDF$ vollendet, und durch C die Parallele mit BA gezogen, die BD in H und AF in G schneide, so ist

$$[a(b+c)] = ABDF.$$

Fig. 5.



Aber dies Parallelogramm enthält als seine beiden Theile die mit ihm gleichbezeichneten Parallelogramme $ABHG$ und $GHDF$, ist also deren Summe, also

$$= ABHG + GHDF = ABCE + ECDF,$$

da die entsprechenden Parallelogramme gleiche Grundseite und Höhe und gleiches Zeichen haben,

$$= [ab] + [ac].$$

Im dritten Falle {Fig. 6} trifft die von C mit AB gezogene Parallele die Verlängerungen von BD und AF, die Durchschnittspunkte mögen auch hier H und G heissen, so ist

Fig. 6.

$$[a(b+c)] = [AB(BC + CD)]$$
$$= [AB \,.\, BD] = ABDF$$
$$= ABHG - FDHG.$$

Aber $FDHG = FDCE = -ECDF$, weil in den letzteren beiden die zweiten Seiten (DC und CD) von den ersten FD und EC aus betrachtet nach verschiedenen Seiten hin liegen, also

$$[a(b+c)] = ABHG + ECDF = [ab] + [ac].$$

Somit ist die erste Formel allgemein bewiesen*). Aus ihr folgt die zweite, indem man in jedem Gliede die Faktoren umtauscht, wobei sich (nach § 50) das Zeichen umkehrt, und dann die Gleichung mit (-1) multiplicirt. So erhält man also aus der erwiesenen Gleichung zuerst

$$-[(b+c)a] = -[ba] - [ca],$$

und dann

$$[(b+c)a] = [ba] + [ca].$$

§ 52. Da zwei Parallelogramme, in denen eine Seite gemeinschaftlich ist, und die daran stossenden in denselben graden Linien liegen, sich wie diese anstossenden Seiten verhalten, so folgt:

„Statt einen Zahlfaktor einem Faktor des äusseren Produktes beizufügen, kann man ihn dem ganzen Produkte beifügen"; das heisst $[\alpha a \,.\, b] = \alpha[ab]$ oder $[a \,.\, \alpha b] = \alpha[ab]$.

Anm. Die beiden letzten Sätze stimmen mit denen der Algebra überein, nur muss man sich hüten, zwei Faktoren umzustellen, ohne das Zeichen umzukehren.

§ 53. „Wenn $p_1, p_2, \ldots$ die Träger der an Masse gleich 1 gesetzten Punkte eines Vereines und $u_1, u_2, \ldots$ die Bewegungen bezeichnen, in denen diese Punkte in irgend einem Augenblicke begriffen sind, so verstehen wir unter der Flächenbewegung (U) die Summe der äusseren Produkte der Träger in die Bewegungen, so dass also

$$U = [p_1 u_1] + [p_2 u_2] + \cdots$$

---

*) Streng genommen ist noch ein weiterer Fall zu betrachten, derjenige nämlich, wo FD und EC auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen. (A. d. H.)

ist. Unter Aenderung der Flächenbewegung verstehen wir die Grösse V, welche aus der Flächenbewegung U auf dieselbe Weise hervorgeht, wie die Bewegungsänderung v eines Punktes aus der Bewegung u desselben, das heisst, wenn U die Flächenbewegung zur Zeit t, U' die zur Zeit $t+\tau$ und $\tau = \frac{1}{n}$ Sekunde ist, so ist $n(U' - U)$ um so genauer $= V$, je kleiner τ wird, und genau $= V$, wenn τ verschwindet."

Anm. Es bezieht sich also die Flächenbewegung und ihre Aenderung stets auf einen bestimmten Punkt O, der als Anfangspunkt der Träger angenommen ist. Wenn die Flächenbewegung des Vereins sich nicht ändert (also $V = 0$ ist), so ist die Summe der Flächenräume, welche die Träger bei der Bewegung beschreiben, unveränderlich (die Summe derselben in dem Sinne von § 51 genommen). Die Flächenbewegung und ihre Aenderung sind hiernach Flächenräume (in dem Sinne von § 50).

§ 54. „Die Aenderung der Flächenbewegung ist für jeden Punkt (die Masse jedes Punktes gleich 1 gesetzt) gleich dem Momente der auf ihn wirkenden Kraft, das heisst gleich dem äusseren Produkte des Trägers in die Kraft, also $= [pv]$, und für den ganzen Verein gleich dem Gesammtmomente aller Kräfte, das heisst

$$V = [p_1 v_1] + [p_2 v_2] + \cdots,$$

wo $p_1, p_2, \cdots$ die Träger, $v_1, v_2, \cdots$ die Kräfte sind."

Denn V erhält man aus U (nach § 53), indem man statt U den Werth U' setzt, den es eine $\frac{1}{n}$ Sekunde später annimmt, wobei man die $\frac{1}{n}$ Sekunde $= \tau$ setzt, dann $n(U' - U)$ bestimmt und darin nach Anwendung der Gleichung $n\tau = 1$ den Werth τ verschwinden lässt. Nun seien $p_1', u_1', p_2', u_2', \cdots$ die Werthe, in die $p_1, u_1, p_2, u_2, \cdots$ nach $\frac{1}{n}$ Sekunde übergegangen sind, so ist

$$U' = [p_1' u_1'] + [p_2' u_2'] + \cdots.$$

Aber, wenn p' und u' die Werthe sind, in welche p und u nach der Zeit $\tau =$ einer n-tel Sekunde übergehen, so ist (nach § 9 und § 13)

$$p' = p + u\tau + x\tau^2,$$
$$u' = u + v\tau + y\tau^2,$$

wo x und y steigende Potenzeihen von τ sind, und p der Träger, u die 26 Bewegung, v † die Bewegungsänderung oder Kraft bezeichnet, also

$$[p'u'] = [pu] + [pv]\tau + [uu]\tau + Z\tau^2,$$

wo Z eine steigende Potenzeihe von τ ist, also, da $[uu]$ nach § 50 Null ist,

$$[p'u'] - [pu] = [pv]\tau + Z\tau^2$$

und

$$n([p'u'] - [pu]) = [pv] + Z\tau,$$

weil $n\tau = 1$ ist. Nun ist

$$n(U' - U) = n([p_1'u_1'] - [p_1u_1]) + n([p_2'u_2'] - [p_2u_2]) + \cdots,$$

also nach der eben bewiesenen Formel

$$= ([p_1v_1] + Z_1\tau) + ([p_2v_2] + Z_2\tau) + \cdots,$$
$$= [p_1v_1] + [p_2v_2] + \cdots + Z'\tau,$$

wenn $Z_1 + Z_2 + \cdots$, was wieder eine steigende Potenzreihe von τ ist, mit Z' bezeichnet wird. Hieraus wird V erhalten, indem man τ verschwinden lässt, also

$$V = [p_1v_1] + [p_2v_2] + \cdots.$$

§ 55. „Die Aenderung der Flächenbewegung eines Vereins ist unabhängig von den inneren Kräften des Vereins, sowie auch von den auf den Anfangspunkt O der Träger wirkenden Kräfte, und gleich dem Gesammtmoment aller äusseren Kräfte; die Flächenbewegung bleibt daher ganz unverändert, wenn die Summe {der Momente} der äusseren Kräfte Null ist."

Denn betrachtet man zum Beispiel die zwischen den Punkten A_1 und A_2 (zu denen die Träger p_1 und p_2 gehören) wirkenden inneren Kräfte, also die Kraft k, mit der A_2 auf A_1 wirkt, und die (nach § 21) damit entgegengesetzte Kraft (also $-k$), mit der A_1 auf A_2 wirkt, so liegen (nach § 21) diese beiden in der Verbindungslinie A_1A_2. Die aus diesen zwei Kräften entspringenden Glieder von V sind daher

$$[p_1k] + [p_2(-k)] = [p_1k] - [p_2k] = [(p_1 - p_2)k].$$

Aber $p_1 - p_2$ ist gleich der Strecke A_2A_1; denn wenn O der Anfangspunkt der Träger ist, so ist

$$p_1 - p_2 = OA_1 - OA_2 = A_2O + OA_1 = A_2A_1,$$

also wird die Summe jener aus der gegenseitigen Einwirkung der Punkte A_1 und A_2 entspringenden Glieder gleich Null, weil diese Summe $= [A_2A_1 \,.\, k]$ ist, und weil k in der Verbindungslinie A_2A_1 liegt, und daher $[A_2A_1 \,.\, k]$ nach § 50 verschwindet. So verschwinden also aus V alle inneren Kräfte, ebenso aber auch die auf O wirkenden Kräfte, weil für sie der Träger, also der eine Faktor des äusseren Produktes, Null wird.

Anm. Es ist dieser Satz von sehr allgemeiner Bedeutung. Er schliesst unter andern nicht nur den ersten Kepler'schen Satz ein, sondern auch den berühmten Satz von der unveränderlichen Ebene des Sonnensystems, indem nämlich die Vielfachen-Summe der von den Trägern der Planeten und der Sonne beschriebenen Flächenräume, nachdem jeder Flächenraum noch mit der Masse des zugehörigen Weltkörpers multiplicirt ist, die Hälfte der Flächenbewegung darstellt, und diese (abgesehen von Kräften, die etwa von anderen Sonnensystemen

her wirken) nach unserm Satze unveränderlich ist, das heisst von unveränderlicher Grösse und unveränderlicher Ebene. Für den Begriff der Arbeit, zu dem wir nun übergehen, bedürfen wir noch einer neuen Multiplikation.

§ 56. „Unter dem inneren Produkte von a mit b, geschrieben $[a \mid b]$, versteht man das algebraische Produkt von a mit der Projektion von b auf a, oder, was dasselbe ist, das algebraische Produkt von b mit der Projektion von a auf b."

27 Anm. Dass beides gleich ist, folgt aus der Aehnlichkeit der durch diese Projektionen entstehenden rechtwinkligen Dreiecke; oder noch vollständiger daraus, dass sowohl nach der einen als der andern Erklärung das innere Produkt der Strecken a und b gleich dem Produkte der drei Zahlen ist, welche die Längen dieser beiden Strecken und den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels darstellen. Es liegt hierin zugleich unmittelbar der folgende Satz.

§ 57. „Die Faktoren eines inneren Produktes sind vertauschbar, das heisst

$$[a \mid b] = [b \mid a].\text{“}$$

§ 58. „Statt mit einer Summe kann man mit den Stücken innerlich multipliciren und die Produkte addiren, das heisst

$$[a \mid (b + c)] = [a \mid b] + [a \mid c].$$

Insbesondere wenn man $[a \mid a]$ der Kürze wegen $= a^2$ setzt, so ist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2[a \mid b] + b^2.\text{“}$$

Denn wenn b_1, c_1, s_1 die Projektionen von $b, c, b + c$ auf a sind, so ist $s_1 = b_1 + c_1$, und nach der Erklärung

$$[a \mid (b + c)] = as_1 = a(b_1 + c_1) = ab_1 + ac_1 = [a \mid b] + [a \mid c].$$

Der zweite Theil ergiebt sich wie in der Algebra.

Anm. Die Sätze § 57 und § 58 stimmen mit denen der algebraischen Multiplikation; die wesentlichste Abweichung des inneren Produktes vom algebraischen ist, dass bei jenem $[a \mid b] = 0$ ist, sobald a auf b senkreht steht, bei diesem ab nur Null werden kann, wenn a oder b Null ist.

§ 59. „Arbeit (L) eines Vereins von Punkten, deren Massen gleich 1 sind, heisst die Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten aller dieser Punkte, das heisst

$$L = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots,$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die Geschwindigkeiten oder (was dasselbe ist)

$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots,$$

wenn $u_1, u_2 \ldots$ die Bewegungen dieser Punkte sind."

Anm. Die Bewegung ist nämlich (§ 3) eine Strecke, die Geschwindigkeit die Länge dieser Strecke; wenn nun u die Strecke und α ihre Länge ist, so ist (nach § 56) $u^2 = \alpha^2$, woraus die Uebereinstimmung der obigen beiden Gleichungen hervorgeht.

§ 60. Unter der während eines Zeitraums geleisteten Arbeit einer Kraft, welche auf einen Punkt von der Masse 1 wirkt, versteht

man erstens, wenn Kraft und Bewegung unverändert bleiben, das innere Produkt dieser Kraft (k) mit dem Doppelten des Weges (s), welchen der Punkt in diesem Zeitraume durchläuft, also das Produkt $2[k \mid s]$, zweitens wenn Kraft oder Bewegung oder beide sich ändern, die Summe, die man erhält, wenn man in jedem kleinsten Theilchen dieses Zeitraumes die Kraft mit dem Doppelten des Weges, den der Punkt in diesem Zeittheilchen durchläuft, innerlich multiplicirt und diese Produkte addirt; oder genauer: die Aenderung, in welcher die Arbeit der auf den Punkt wirkenden Kraft (k) in einem Augenblicke begriffen ist (wofür wir auch der Kürze wegen die augenblickliche Arbeit sagen), ist gleich dem doppelten inneren Produkte der Kraft und der Bewegung (u) dieses Punktes, also $= 2[k \mid u]$.

Anm. Die erstere Erklärung ist in der zweiten allgemeineren enthalten und ist hier nur vorangestellt, weil es am zweckmässigsten ist, von diesem besonderen Falle auszugehen; die beiden Formen der allgemeineren Erklärung stimmen vermöge des Begriffes der augenblicklichen Aenderung (in § 12) überein, wir werden uns jedoch nur an die letztere Form, als die genauere, halten. Wann die Arbeit einer Kraft Null oder negativ ist, ergiebt sich sogleich aus dem Begriffe; die Arbeit eines Vereins dagegen kann nie negativ sein, und ist nur dann Null, wenn der ganze Verein ruht. 28

§ 61. „Die Arbeit eines Vereins ändert sich von einer Zeit zur andern um die Arbeit aller Kräfte während der Zwischenzeit“, insbesondere: „Die Arbeit eines sich bewegenden Vereins ist gleich der gesammten Arbeit aller Kräfte, welche ihn aus dem Zustande der Ruhe in diesen Zustand der Bewegung zu versetzen vermögen.“

Es ist zuerst zu zeigen, dass dies für jeden einzelnen Punkt, dessen Masse 1 ist, und für die augenblickliche Aenderung zu jeder Zeit gilt. Es sei u die Bewegung, v die Bewegungsänderung eines solchen Punktes zur Zeit t, also auch (nach § 22) v die gesammte Kraft, die auf diesen Punkt wirkt, so ist die Aenderung, in welcher die Arbeit dieser Kraft zu dieser Zeit begriffen ist (nach § 60)

$$= 2[u \mid v].$$

Die Arbeit des Punktes zu dieser Zeit ist u^2, die Bewegung zur Zeit $t + \tau$, wo $\tau = \frac{1}{n}$ Sekunde, also $n\tau = 1$ ist, sei u', also die Arbeit des Punktes zur Zeit $t + \tau$ gleich u'^2, so findet man (nach § 9 und § 13) die Aenderung, in welcher die Arbeit des Punktes zur Zeit t begriffen ist, indem man $n(u'^2 - u^2)$ entwickelt und darin τ verschwinden lässt. Nun ist (nach § 13) $u' = u + v\tau + \cdots$, wo die folgenden Glieder nur noch höhere Potenzen von τ enthalten; also

$$u'^2 = (u + v\tau + \cdots)^2 = u^2 + 2[u \mid v]\tau + \lambda\tau^2,$$

wo die Glieder mit höheren Potenzen durch das Glied $\lambda\tau^2$ zusammengefasst sind. Also ist

$$u'^2 - u^2 = 2[u \mid v]\tau + \lambda\tau^2,$$

also

$$n(u'^2 - u^2) = 2[u \mid v] + \lambda\tau,$$

weil $n\tau = 1$ ist. Hieraus folgt (wenn man τ verschwinden lässt), dass die Aenderung, in welcher die Arbeit des Punktes zur Zeit τ begriffen ist,

$$= 2[u \mid v],$$

also zu jeder Zeit gleich der Aenderung sei, in welcher die Arbeit der Kraft in demselben Zeitpunkte begriffen ist, also muss auch in jedem Zeitraume die Aenderung der ersteren gleich der Aenderung der letzteren sein, und zwar für jeden Punkt, also auch für alle insgesammt, das heisst für den ganzen Verein.

Anm. Was hier Arbeit eines Vereins genannt ist, wird gewöhnlich mit dem verwirrenden Namen „lebendige Kraft" bezeichnet, und die Arbeit der Kräfte wird in der Regel halb so gross angenommen, als es von uns geschehen ist. Bei unserer Betrachtungsweise ist Arbeit des Vereins und Arbeitsleistung aller Kräfte, die ihn aus dem Zustande der Ruhe in diesen Zustand der Bewegung geführt haben, wie eben gezeigt, stets gleich. Einen besonderen Fall unseres Satzes bildet zum Beispiel die Gleichung § 38.

§ 62. „Die Arbeit, welche die zwischen zwei Punkten P und Q 29 wirkenden † inneren Kräfte bei beliebiger Bewegung jener Punkte leisten, ist stets dieselbe, als ob der eine Punkt (P) unveränderte Lage (etwa in α) behielte, der andere (Q) aber sich in einer und derselben geraden Linie so bewegte, dass er in jedem Augeublicke von α denselben Abstand hat wie Q von P."

Es mögen die Punkte P und Q zur Zeit t in Wirklichkeit die Lagen A und B, zur Zeit $t + \tau$ $\left(\text{wo } \tau = \frac{1}{n}\right)$ die Lagen A' und B'; die entsprechenden auf der geraden Linie sich bewegenden Punkte zur Zeit t die Lagen α und β, zur Zeit $t + \tau$ die Lagen α und β' haben, und die Massen der Punkte gleich 1 angenommen werden. Es ist also nach der Annahme AB mit $\alpha\beta$ und $A'B'$ mit $\alpha\beta'$ gleich lang. Ferner seien zur Zeit t die Bewegungen, in welchen A, B, β begriffen sind, beziehlich u_2, u_3, u_1, und sei $u_3 - u_2$ mit u bezeichnet, ferner sei AB mit c, $\alpha\beta$ mit γ bezeichnet, wo γ und u_1 als Zahlen betrachtet werden können, da sie in einer festen geraden Linie liegen. Die Kräfte, mit denen Punkte von der Masse 1 auf einander wirken, liegen (nach § 21) in der Verbindungslinie beider Punkte und sind einander entgegengesetzt. Also können wir die Kraft, mit der A auf B wirkt, mit λc bezeichnen, wo λ eine Zahl ist; dann ist die Kraft, mit der B auf A wirkt, $-\lambda c$, und die, mit der α auf β wirkt, $\lambda\gamma$ (da bei gleicher Entfernung die Kraft dieselbe ist). Dann ist die Arbeit der inneren Kräfte zur Zeit t im ersten Falle (nach § 60)

$$= 2\lambda[c \mid u_3] - 2\lambda[c \mid u_2] = 2\lambda[c \mid (u_3 - u_2)] = 2\lambda[c \mid u],$$

im zweiten Falle $= 2\lambda\gamma u_1$, also ist nur zu zeigen, dass $[c \mid u] = \gamma u_1$ ist. Nun ist vorausgesetzt, dass AB mit $\alpha\beta$, $A'B'$ mit $\alpha\beta'$ gleich lang, also

$$c^2 = \gamma^2, \quad [A'B']^2 = (\alpha\beta')^2$$

sei. Es ist aber (nach § 5)

$$A'B' = A'A + AB + BB' = AB + (BB' - AA'),$$

aber BB' (nach § 9) $= u_3\tau + \cdots$, $AA' = u_2\tau + \cdots$, wo die höheren Potenzen von τ weggelassen sind, also

$$A'B' = c + (u_3 - u_2)\tau + \cdots = c + u\tau + \cdots,$$

also

$$[A'B']^2 = [c + u\tau + \cdots]^2 = c^2 + 2[c \mid u]\tau + \cdots = \gamma^2 + 2[c \mid u]\tau + \cdots.$$

Ferner aus gleichem Grunde

$$(\alpha\beta')^2 = (\gamma + \beta\beta')^2 = (\gamma + u_1\tau + \cdots)^2 = \gamma^2 + 2\gamma u_1\tau + \cdots.$$

Diese Werthe in die obige Gleichung eingesetzt giebt

$$\gamma^2 + 2[c \mid u]\tau + \cdots = \gamma^2 + 2\gamma u_1\tau + \cdots,$$

oder auf beiden Seiten γ^2 subtrahirt, mit 2 gehoben und die höheren Potenzen von τ auf die rechte Seite geschafft,

$$[c \mid u]\tau = \gamma u_1\tau + \mu\tau^2,$$

wo μ eine steigende Potenzreihe von τ bedeutet. Dies mit n multiplicirt giebt, da $n\tau = 1$ ist, $[c \mid u] = \gamma u_1 + \mu\tau$. Dies gilt für jeden Werth von τ, also auch wenn τ verschwindet. Somit ist $[c \mid u] = \gamma u_1$, also nach dem Obigen die Arbeit stets gleich.

Anm. Stellt man sich nun vor, der Punkt P sei fest in A, und der Punkt Q bewege sich in einer festen, durch P gezogenen geraden Linie, und zwar so, dass er zu einer gewissen Zeit sich in B befinde und in einer späteren Zeit wieder in die Lage B zurückkehre, so folgt sogleich, dass die Arbeit, † welche 30 die zwischen P und Q wirkenden inneren Kräfte während der Zwischenzeit geleistet haben, null sein muss; denn hat sich der Punkt Q von B bis C entfernt, und er kehrt nun von C nach B zurück, so leisten die inneren Kräfte jetzt genau die entgegengesetzte Arbeit wie vorher, da jedesmal, wenn er dabei in eine frühere Lage zurückkehrt, die Kraft dieselbe, der Weg aber der entgegengesetzte wird; es hebt sich also die zuerst geleistete Arbeit gegen die zuletzt geleistete auf; also ist die Arbeit der inneren Kräfte während der ganzen Zwischenzeit, in welcher der Punkt Q, von B ausgehend, wieder nach B zurückkehrt, null. Dasselbe gilt nun nach dem obigen Satze, auch wenn sich die Punkte P und Q beliebig bewegen, wenn sie nur zuletzt in dieselbe Entfernung zurückkehren, die sie zu Anfang hatten, also auch für die inneren Kräfte eines beliebigen Vereines, wenn nur zuletzt je zwei Punkte des Vereins wieder denselben Abstand haben, wie zuerst. Daraus folgt der Satz:

§ 63. „Wenn ein Verein zu zwei verschiedenen Zeiten insofern denselben Zustand hat, als zu der einen Zeit der gegenseitige Abstand

je zweier Punkte des Vereins derselbe ist wie zur andern, so muss die von den inneren Kräften in der Zwischenzeit geleistete gesammte Arbeit gleich Null sein."

Anm. Hieraus folgt, dass keine Maschine selbständig Arbeit leisten kann (zum Beispiel keine Wassermühle das Wasser, was die Räder treibt, allein in die Höhe pumpen kann), ja, dass die Maschine auch nicht einmal diejenigen Hindernisse, welche der Erhaltung ihrer Bewegung entgegenstehen, selbständig zu überwinden vermag (perpetuum mobile). Auf der andern Seite giebt es Erscheinungen, welche mit dem erwiesenen Gesetze in Widerspruch zu stehen scheinen. Wenn zum Beispiel ein Pendel auf der Erde sich bewegt, so sollte es, sobald es wieder in dieselbe (zum Beispiel vertikale) Lage kommt, auch stets wieder dieselbe Arbeit leisten, das heisst mit derselben Geschwindigkeit schwingen, wenn es nicht etwa seine Arbeit an andere Körper übertragen hat; aber auch wenn es im luftleeren Raume schwingt, hört die Bewegung und also auch die Arbeit des Pendels auf, und zwar durch die Reibung auf der harten Unterlage, auf der die Schneide des Pendels schwingt. Die äusserst geringe Abnutzung der Schneide und ihrer Unterlage reicht nicht im mindesten aus, um diesen Verlust an Arbeit zu erklären. Es muss vielmehr angenommen werden, dass dabei Bewegungen eintreten, die uns als solche verborgen sind, Bewegungen von der Art, dass die bewegten Körpertheile genau die Arbeit verrichten, welche scheinbar verloren gegangen ist. Nun hat man gefunden, dass bei solchem scheinbaren Verluste an Arbeit jedesmal Wärme entsteht, und zwar stets gleich viel Wärme, wenn der Verlust an Arbeit derselbe ist, mögen auch die Umstände, unter denen dieser Verlust stattfindet, noch so verschieden sein. Hieraus hat man den sehr berechtigten Schluss gezogen, dass die Wärme in nichts anderem bestehe als in Bewegungen der kleinsten Theile des erwärmten Körpers, und dass die hierbei geleistete Arbeit das Maass der Wärme sei. Die Richtigkeit dieses Schlusses bestätigt sich dadurch, dass man auch im Stande ist (wie bei der Dampfmaschine) durch die Wärme Bewegungen hervorzurufen, und dass hierbei stets, durch welche Hülfsmittel man auch die Wärme zur Arbeitsleistung benutzen mag, stets genau so viel Arbeit hervorgerufen wird, als dem dabei stattfindenden Verlust an Wärme entspricht.

Zusatz.*) 1) Es sei p der Träger eines Punktes, ϱ seine Länge, u die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung. Wenn dann p übergeht in $p + u\tau + \cdots$, so gehe ϱ über in ϱ'. Dann ist

$$\begin{aligned}\varrho'^2 &= [p + u\tau + \cdots]^2 \\ &= \varrho^2 + 2[p \mid u]\tau + \cdots \\ &= \varrho^2\left(1 + \frac{2}{\varrho^2}[p \mid u]\tau + \cdots\right),\end{aligned}$$

daher

$$\varrho' = \varrho + \frac{1}{\varrho}[p \mid u]\tau + \cdots$$

und weiter

$$\varrho'^n = \varrho^n + n\varrho^{n-2}[p \mid u]\tau + \cdots.$$

Dabei gehe u über in u'; dann ist

$$u' = u + v\tau + \cdots,$$

*) Nach einem besonderen Manuscript. (A. d. H.)

Daher

$$u'^2 = u^2 + 2[u \mid v]\tau + \cdots.$$

Ist nun stets $u^2 = \alpha\varrho^n \{+\beta\}$, wo α {und β} von der Zeit unabhängig, so muss auch $u'^2 = \alpha\varrho'^n \{+\beta\}$ sein, daher

$$2[u \mid v]\tau + \cdots = \alpha n \varrho^{n-2}[p \mid u]\tau + \cdots$$

und

$$[u \mid (2v - \alpha n \varrho^{n-2} p)] = 0,$$

also*)

$$v = \frac{n\alpha}{2} \varrho^{n-2} p,$$

das heisst die Kraft ist eine Centralkraft und ihre Grösse ist

$$= \frac{n}{2} \varrho^{n-1}.$$

2) Man kann dieses Resultat benutzen, um aus den Kepler'schen Gesetzen den Ausdruck für die Kraft abzuleiten.

Ist, wie in § 47, $\frac{1}{2} f^2$ der Flächenraum, den der Träger FP in der Zeiteinheit beschreibt, so ist

$$f^2 = (u)\varrho \sin \sigma,$$

wenn σ der Winkel der Tangente in P mit dem Brennstrahl FP ist und (u) die Grösse von u bezeichnet. Nach der Eigenschaft der Ellipse ist aber 2σ der Nebenwinkel zu dem Winkel FPF', wo F' der zweite Brennpunkt ist und daher hat man {mit Hülfe des Cosinussatzes}

$$\sin^2 \sigma = \frac{b^2}{\varrho \varrho_1},$$

wenn $F'P$ mit ϱ_1 bezeichnet ist. Somit folgt

$$f^4 = (u)^2 \varrho^2 \cdot \frac{b^2}{\varrho \varrho_1},$$

$$u^2 = \frac{f^4}{b^2} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{f^4}{b^2} \cdot \frac{2a - \varrho}{\varrho}$$

$$= \frac{2af^4}{b^2} \cdot \frac{1}{\varrho} - \frac{f^4}{b^2}.$$

Nach dem vorhin gefundenen Resultat wird also die Kraft

$$= -\frac{af^4}{b^2} \cdot \frac{p}{\varrho^3},$$

ist also nach dem Brennpunkt gerichtet und hat die Grösse

$$\frac{af^4}{b^2} \cdot \frac{1}{\varrho^2}.$$

*) Dieser Schluss ist nicht ganz berechtigt. (A. d. H.)

Vierter Abschnitt.

Bewegung fester Körper.

§ 64. „Vollkommen fest nennen wir einen Körper, dessen Punkte einen unveränderlichen Abstand haben."

31 Zwar giebt es in der Natur keinen vollkommen festen Körper, aber dennoch müssen die für vollkommen feste Körper nothwendigen Gesetze auch für jeden in der Natur vorhandenen Körper um so vollkommener gelten, je geringfügiger die Veränderungen sind, welche die gegenseitigen Abstände seiner Punkte bei der Bewegung erleiden. Die Betrachtung dieser Veränderungen bleibt in diesem Abschnitte ausgeschlossen.

§ 65. „Wenn ein Punkt O eines festen Körpers unbeweglich ist, so kann der Körper sich in jedem Augenblicke nur um eine durch diesen Punkt gehende Axe drehen, und seine Bewegung wird genau bestimmt sein, wenn die Lage dieser Axe und die Drehungsgeschwindigkeit α, das heisst die Geschwindigkeit eines Punktes, dessen Entfernung von der Axe einen Fuss beträgt, bestimmt ist. Die Flächenbewegung U des Körpers findet sich dann

$$U = \alpha(b_1^2 + \cdots + b_m^2) = \alpha T,$$

wenn $b_1, \cdots, b_m$ die Lothe bezeichnen, welche von den Körperpunkten (deren Massen $= 1$ angenommen sind) auf die Axe gefällt werden; man nennt $T = b_1^2 + \cdots + b_m^2$ die Trägheit des Körpers bei seiner Drehung um jene Axe. Wenn b^2 das Mittel zwischen $b_1^2, \cdots, b_m^2$ ist, so mag b der (zu jener Axe gehörige) Schwingungsradius des Körpers heissen, so dass also

$$T = b_1^2 + \cdots + b_m^2 = mb^2$$

ist."

Der Beweis sei hier nur angedeutet. Es seien $A_1, \cdots$ die Punkte, $B_1 A_1 = b_1, \cdots$ die Lothe auf die durch O gehende Axe, $OB_1 = a_1, \cdots$. Ferner seien $c_1, \cdots$ gleich lang mit $b_1, \cdots$, aber senkrecht zu ihnen und zur Axe, und zwar nach der Drehungsseite hin, so sind $\alpha c_1, \cdots$ die Bewegungen der Punkte; die Träger von O aus sind $OB_1 + B_1 A_1 = a_1 + b_1$, und so weiter. Also ist (nach § 53)

$$U = \alpha[(a_1 + b_1)c_1] + \cdots = \alpha[a_1 c_1] + \cdots + \alpha[b_1 c_1] + \cdots.$$

Die erstere Summe stellt einen durch die Axe gehenden Flächenraum dar, die letztere einen dagegen senkrechten, die erstere Summe muss, da die Drehung um jene Axe erfolgen soll, Null sein, also

$$U = \alpha[b_1 c_1] + \cdots + \alpha[b_m c_m].$$

Jeder der in Klammern geschlossenen Flächenräume ist ein Quadrat, ihre Inhalte sind also $b_1^2, \cdots, b_m^2$, also

$$U = \alpha(b_1^2 + \cdots + b_m^2).$$

§ 66. „Wenn a und b die Schwingungsradien eines Körpers in Bezug auf zwei parallele Axen, von denen die erstere durch den Schwerpunkt geht, bezeichnen, und c das Loth vom Schwerpunkte auf die zweite Axe ist, so ist

$$b^2 = a^2 + c^2.\text{“}$$

$A_1, \cdots, A_m$ seien die einfachen Körperpunkte, A ihr Schwerpunkt, $AO = c$ das Loth auf die zweite Axe. Von $A_1, \cdots, A_m$ seien die Lothe auf beide Axen gefällt, die Fusspunkte auf der ersten Axe seien $B_1, \cdots, B_m$, auf der zweiten $C_1, \cdots, C_m$, und seien $B_1 A_1$ mit a_1, $A_1 C_1$ mit b_1 bezeichnet und so weiter, so ist (nach § 65)

$$mb^2 = b_1^2 + \cdots + b_m^2 = (c + a_1)^2 + \cdots + (c + a_m)^2 =$$
$$= mc^2 + 2[c \mid (a_1 + \cdots + a_m)] + ma^2.$$

Aber die eingeschlossene Summe ist vermöge § 34 null, also mit m gehoben $b^2 = c^2 + a^2$.

Nach § 54 ist die Aenderung der Flächenbewegung gleich dem Gesammtmomente aller äusseren Kräfte. So würde man, wenn man diese Kräfte und also auch ihr Gesammtmoment kennte, die † Aenderung der Flächenbewegung 32 erhalten, aus ihr dann durch Integriren die Flächenbewegung selbst, und daraus nach § 65 die Bewegung des festen Körpers um seinen unbeweglichen Punkt. Nimmt man als diesen Punkt den Schwerpunkt an, so hat man die Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt, und da man nach Abschnitt II auch die Bewegung des Schwerpunktes finden kann, so kann man schliesslich die ganze Bewegung des Körpers auf die Weise ableiten. Allein die Ausführung dieses Verfahrens stösst überall auf grosse Schwierigkeiten, und wir beschränken uns daher auf die einfachsten Fälle. Dabei setzen wir als Einheit des Gewichtes (das heisst der Schwere eines Körpers) das Pfund = $1/2$ Kilogramm.

§ 67. „Wenn ein Körper, der um einen Punkt O drehbar ist, nur von der Schwere gezogen wird (Pendel), so ist das Gesammtmoment der Schwere dasselbe, als ob die ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre, nämlich $= 2mgc \sin\varphi$, wo m die Masse des Körpers, c die Länge von OA und φ der Winkel ist, den OA mit der Richtung der Schwerkraft ($2g$) bildet.“

Denn das Moment M ist (nach § 54), wenn $A_1, \cdots, A_m$ die einfachen Körperpunkte sind,

$$= [OA_1 . 2g] + \cdots + [OA_m . 2g] =$$
$$= 2[(OA + AA_1)g] + \cdots + 2[(OA + AA_m)g] =$$
$$= 2m[OA . g] + 2[AA_1 + \cdots + AA_m)g].$$

Die eingeschlossene Summe ist nach § 24 Null, also $M = 2m[OA . g]$. Aber $[OA . g]$ ist der Flächenraum des Parallelogramms, in welchem

die Seiten c und g den Winkel φ einschliessen, also $= cg \sin \varphi$, also $M = 2mgc \sin \varphi$.

§ 68. „Die durch die Schwere bewirkte Bewegung eines Körpers (Pendels) um eine wagerechte Axe ist dieselbe, als ob der Körper nur aus einem schweren Punkte bestände, den man den Schwingungspunkt nennt, und dessen Lage man durch folgende Zeichnung erhält: Man fälle vom Schwerpunkte A des Körpers ein Loth AO auf die Drehungsaxe, errichte auf OA das Loth AB gleich dem zum Schwerpunkte gehörigen Schwingungsradius a (§ 66), und auf OB das Loth BC, welches OA in C schneidet, so ist C der Schwingungspunkt. Aus dieser Zeichnung folgt, dass wenn die Drehungsaxe durch C geht, O der Schwingungspunkt ist (Reversionspendel)."

Nach § 54 ist die Aenderung der Flächenbewegung für jeden einfachen Punkt gleich dem äusseren Produkt des Trägers in die Bewegungsänderung des Punktes; daraus folgt genau wie in § 65 die Aenderung V der Flächenbewegung $= \beta(b_1^2 + \cdots + b_m^2)$, wenn β die Aenderung der Drehungsgeschwindigkeit bezeichnet, also $V = \beta m b^2 = \beta m(c^2 + a^2)$. Aber nach § 55 ist V gleich dem Gesammtmomente der äusseren Kräfte, also (nach § 67) $= 2mgc \sin \varphi$; also $\beta(c^2 + a^2) = 2gc \sin \varphi$. Besteht der Körper nur aus einem schweren Punkte, dessen Entfernung von der Drehungsaxe l ist, so ist für ihn der zum Schwerpunkte gehörige Schwingungsradius Null, also für ihn $\beta l = 2g \sin \varphi$. Beide Ausdrücke sind identisch, wenn $l = (c^2 + a^2) : c$ ist, woraus die obige Konstruktion folgt.

§ 69. „Die Dauer T der ganzen Schwingung (hin und zurück) eines Pendels ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} \left(1 + (\tfrac{1}{2})^2 a + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 a^3 + \cdots\right)\Big],$$

wo l die Entfernung (OP) des Schwingungspunktes (P) von der Axe, $a = \sin^2 \frac{1}{2}\alpha$ und α der Winkel ist, den OP in seiner höchsten Lage mit der senkrechten bildet."

Fig. 7.

33

Damit der schwierige Beweis gelinge, kann man P (Fig. 7) auf eine durch seine tiefste Lage A gehende senkrechte Linie projiciren und zunächst die Geschwindigkeit u dieser Projektion Q bestimmen und dann die Linie zwischen A und der höchsten Lage B dieses Punktes Q zum Durchmesser eines Kreises machen, welcher PQ in S schneide. Bezeichnet man dann SQ mit ϱ, den zum Bogen SA gehörigen Centriwinkel mit z und $\sin^2 \frac{1}{2} AOP$ mit x, so lässt sich die Zeit t, welche der Schwingungspunkt gebraucht, um von A nach P zu gelangen, in der Form $t = \gamma z - \varrho R$ darstellen, in welcher γ eine Zahl und R eine steigende

Potenzreihe von x ist.*) Indem man dann hieraus u entwickelt und mit dem gefundenen Ausdrucke für u vergleicht, bestimmen sich sämmtliche Koefficienten von R, und zuletzt γ, und T wird dann $= 4\pi\gamma$. — Die Reihe ist eine echte, und schon, wenn $\alpha = 5^0$ ist, liefert das erste Glied eine Annäherung, die noch nicht um $1/_{1000}$ desselben von dem wahren Werthe abweicht. Annäherungsweise kann man also $gT^2 = 2\pi^2 l$ setzen. — Bestimmung von g, Länge des Sekundenpendels.

§ 70. „Die Centrifugalkraft (Fliehkraft), das heisst die Kraft, mit der sich jeder einfache Punkt eines um eine Axe sich drehenden Körpers von dieser Axe zu entfernen strebt, ist gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit dieses Punktes, dividirt durch seine Entfernung von der Axe.

Beweis aus § 45. — Centrifugalkraft auf der Erde; ihr Einfluss auf den Fall, das Pendel und auf die Gestalt der Erde.

§ 71. „Wenn der Schwerpunkt eines Körpers gezwungen ist, sich auf schräger, aber geradlinigter Bahn zu bewegen, so sind die Gesetze, nach denen er sich, von der Schwere gezogen, bewegt, dieselben wie für den Fall der Körper, nur dass man $g \sin\alpha$ statt g zu setzen hat, wenn α den Neigungswinkel der Bahn bezeichnet, namentlich ist seine Geschwindigkeit stets dieselbe, als ob er von gleicher Höhe senkrecht herabgefallen wäre; und letzteres gilt auch bei beliebiger Bahn."

Der Beweis erfolgt durch Zerlegung der Schwerkraft in eine gegen die Bahn lothrechte und eine damit parallele Kraft.

§ 72. Wenn ein Körper auf einen andern stösst, so wirken in der Zeit, wo sie sich berühren, vermöge des Stosses zwischen beiden nur innere Kräfte, welche auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene senkrecht stehen. Wenn jeder der beiden Körper elastisch ist, das heisst nach dem Stosse wieder denselben Zustand (denselben gegenseitigen Abstand seiner Theile) wie vor dem Stosse hat, so folgt aus § 63, dass die Arbeit dieser inneren Kräfte während der Berührungszeit null ist, also die gesammte Arbeit beider Körper nach dem Stosse dieselbe sein muss wie vor demselben.

Hieraus folgen alle Gesetze für den Stoss elastischer Körper, sofern man nur die Bewegung der Schwerpunkte (nicht auch die Drehung beim sogenannten excentrischen Stosse) betrachtet.

§ 73. Wenn ein Körper mit der Schwerpunktsbewegung u auf einen andern mit der Schwerpunktsbewegung u_1 stösst, und $u - u_1$ auf das Loth projicirt wird, welches auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene der beiden auf einander stossenden Körper errichtet ist, und diese Projektion mit v bezeichnet wird, so wird die Schwerpunktsbewegung nach dem Stosse

*) Setzt man $x = a \sin^2\varphi$, so wird $z = 2\varphi$, $2\varrho = la \sin 2\varphi$. (A. d. H.)

$$u - \frac{2m_1 v}{m + m_1}$$

für den ersten und

$$u_1 + \frac{2mv}{m + m_1}$$

für den zweiten Körper.

84 Der Beweis folgt aus § 72. — Gerader, schiefer Stoss. — Formeln für gleiche Massen. — Segeln, Bewegung der Windmühlflügel.

§ 74. Die Maschine kann die beiden Faktoren der Arbeit (Kraft und Weg) nur in umgekehrtem Verhältnisse ändern.

Denn ihr Produkt, das heisst die Arbeit selbst, muss (nach § 68) bei jeder periodischen Bewegung der] Maschine unverändert bleiben. Die wichtigsten einfachen Maschinen, welche jene Faktoren ändern, sind: Hebel, Rad an der Welle, Winde, Rolle, Flaschenzug, Potenzrolle, Differenzrolle, Keil, Schraube, Knie.

§ 75. In ihrer gleichförmigen Arbeit wird die Maschine erhalten durch das Schwungrad, bei welchem die grössten Massen nach dem Umfange zu gehäuft sind.

Es wird also auf das Schwungrad ein möglichst grosser Theil der Arbeit übertragen, der sich dann bei der Bewegung zu erhalten sucht.

§ 76. Errichten wir auf einer Axe neben einander zwei parallele Lothe und verbinden ihre Endpunkte und lassen das so entstehende Viereck um die Axe rollen, so heisse der dadurch entstehende Körper ein Rad (Kreisrad). Der Winkel, den die Axe mit der gegenüberliegenden Seite des Vierecks bildet, heisse Winkel des Rades. Eine kreisförmige Bewegung wird von einer Axe auf die andere übertragen durch Räder, die sich berühren, und deren Winkel zusammen gleich dem Winkel der Axen sind.

Zähne; Sternrad, Kronrad, Kegelrad. Uebertragung durch Riemen, Ketten, Schnüre.

§ 77. Maschinenarm heisst die Verbindung zweier Stangen, von denen eine um eine feste Axe rollt, die andere um eine mit jener parallele an dem Ende der ersten Stange befestigte Axe rollt, und an ihrem eignen Ende eine mit jenen Axen parallele Durchbohrung (die Hand) hat. Wenn die Hände zweier Arme zwei nicht parallele Axen eines Körpers ergreifen, so bewegt sich dieser geradlinigt.

Diese 1853 von Sarrut*) angegebene Methode der Verwandlung der kreisförmigen Bewegung in geradlinigte (und umgekehrt) verdient allgemeine Einführung. Sie beruht auf dem Satze, dass sich zwei Ebenen in gerader Linie schneiden.

§ 78. Damit ein Theil der Maschine eine beliebige vorgeschriebene Bahn in vertikaler Ebene mit vorgeschriebener Geschwindigkeit be-

*) Comptes Rend. XXXVI. Seite 1125. (A. d. H.)

schreibe, genügt, ihn zur Hand eines Armes zu machen, dessen obere Stange (vermittelst eines seitlichen Stiftes) auf dem (nicht kreisförmigen) Umfange eines sich drehenden Rades und dessen untere Stange ebenso auf einer festen Bahn ruht.

Gestalt des Rades und der Bahn erhält man, wenn man zuerst die Hand des Maschinenarmes auf die vorgeschriebene Art führt und die beiden Stifte mit einem abfärbenden Stoffe versieht, dann beschreibt der erste auf der vor ihm sich drehenden Scheibe, der andere auf der festen die verlangten Gestalten. — Wahl des Mittelpunktes des rollenden Rades. — Elastische Federn. — Bewegung in andern Ebenen, im Raume.

II. Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre.

Von

H. Grassmann in Stettin.

(Mathematische Annalen Bd. 12, Heft 2, S. 222—240, ausgegeben am 9. 8. 1877, Leipzig.)

Es giebt wohl kaum ein Gebiet, auf welchem sich die Unentbehrlichkeit des in meiner Ausdehnungslehre (von 1844 und 1862) dargestellten Kalküls so schlagend erwiese wie in der Mechanik. Man kann sagen, jeder einfache mechanische Begriff sei zugleich ein einfacher Verknüpfungsbegriff jenes Kalküls. Und in der That hat sich mir diese ganze Rechnungsmethode, nachdem nur einmal die erste Idee derselben erfasst war, an der Hand der Mechanik am schnellsten und fruchtreichsten weiter entwickelt.

Die Methoden, welche ich in diesem Aufsatze verwende, und die Gleichungen, zu denen ich durch sie gelange, habe ich (abgesehen von der hier und da geänderten Bezeichnung) ohne Ausnahme schon in einer Arbeit über die Theorie der Ebbe und Flut, welche ich zu Pfingsten 1840 als Prüfungsarbeit bei der wissenschaftlichen Prüfungskommission in Berlin eingereicht habe, dargelegt. Nur weniges davon ist in meine Ausdehnungslehre von 1844 übergegangen. Die neueren Lehrbücher und die Aufsätze über Mechanik, namentlich auch G. Kirchhoff's Vorlesungen (1875, 1876) zeigen mir, dass die Darstellung dieser Methoden noch heute ebenso förderlich sein werde, als sie es vor 37 Jahren gewesen wäre, wenn ich damals zu ihrer Veröffentlichung Zeit und Gelegenheit gefunden hätte. In einem späteren Aufsatze denke ich dann die hauptsächlichsten der hier noch nicht berührten Probleme der Mechanik durch neue, gleichfalls der Ausdehnungslehre entnommene Methoden zu lösen.*)

*) Zur Ausführung dieser Arbeit ist Grassmann nicht mehr gekommen. (A. d. H.)

§ 1. Begriffe und Gesetze der Ausdehnungslehre, die hier benutzt werden sollen.

Der Deutlichkeit wegen gebe ich hier eine Uebersicht über den Kalkül, so weit er in diesem Aufsatze zur Anwendung kommen soll, verweise aber in Bezug auf die nähere Begründung auf meine Ausdehnungslehren von 1844 und 1862, welche ich im Folgenden mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bezeichne. Ich lege den Begriff der Strecke zu Grunde. 223 Ich verstehe darunter eine begrenzte gerade Linie von bestimmter Länge und Richtung, das heisst, ich setze zwei Strecken als solche dann und nur dann gleich, wenn sie gleich lang und gleichgerichtet sind. Strecken werden addirt, indem man sie stetig aneinander legt, dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten ihre Summe ($\mathfrak{A}_1$ § 15—18, $\mathfrak{A}_2$ Nr. 220). Die Subtraktion führt auf die Addition zurück, da man statt eine von dem Punkte A nach B gehende Strecke zu subtrahiren, die von B nach A gehende addiren kann. Der Begriff der Vervielfachung oder Theilung durch eine Zahl ergiebt sich aus dem allgemeinen Begriffe dieser Verknüpfungen unmittelbar. Dass für alle diese Verknüpfungen die gewöhnlichen Rechnungsgesetze derselben vollständig gelten, ist in der Ausdehnungslehre bewiesen.

Das äussere Produkt der Strecken a und b, geschrieben $[ab]$, wird formell dadurch definirt, dass erstens wie bei jedem Produkt die Beziehung zur Addition gilt, das heisst

$$[a(b+c)] = [ab] + [ac]$$

und

$$[(a+b)c] = [ac] + [bc]$$

ist, und zweitens das äussere Produkt gleicher Strecken null ist,

$$[aa] = 0,$$

begrifflich aber dadurch, dass wenn a die Strecke von dem Punkt A nach B, b die Strecke von B nach C oder von A nach D ist, dann $[ab]$ der Flächenraum des Parallelogramms $ABCD$ ist, und zwar in dem Sinne, dass zwei Flächenräume als solche dann und nur dann gleich sind, wenn sie in parallelen Ebenen liegen, gleichen Inhalt haben und der Umfang in beiden nach derselben Seite (rechts oder links) hin umläuft ($\mathfrak{A}_1$ § 28—30, 37, $\mathfrak{A}_2$ Nr. 239 ff. {bes. Nr. 254}). Die Addition der Flächenräume, auch wenn sie nicht in parallelen Ebenen liegen, ist durch die Formel

$$[ab] + [ac] = [a(b+c)]$$

vollkommen bestimmt. Aus der Formel

$$[(a+b)(a+b)] = 0$$

ergiebt sich sogleich das zweite wichtige Gesetz der äusseren Multiplikation, nämlich

$$[ab] = -[ba].$$

Das äussere Produkt dreier Strecken a, b, c oder eines Flächenraums $[ab]$ und einer Strecke c, wird formell dadurch definirt, dass

$$[abb] = 0$$

und also auch

$$[abc] = -[acb]$$

ist, begrifflich bei gehöriger Zeichenbestimmung als Inhalt eines Spates (Parallelepipedons), was a, b, c zu aneinander stossenden Seiten hat. Es wird null, wenn die drei Strecken in einer Ebene liegen. Ferner ist

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[acb] = -[cba] = -[bac].$$

($\mathfrak{A}_1$ § 37, $\mathfrak{A}_2$ Nr. 240 ff.)

Unter dem **inneren** Produkte $[a \mid b]$ zweier Strecken a und b, deren Längen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind, und die den Winkel $\angle ab$ einschliessen, verstehe ich das Produkt

$$[a \mid b] = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos \angle ab,$$

und für $[a \mid a]$ schreibe ich der Kürze wegen a^2 und nenne dies das innere Quadrat der Strecke a ($\mathfrak{A}_1$ Seite XI, $\mathfrak{A}_2$ Nr. 145). Ich will den Verein dreier Strecken e_1, e_2, e_3, die zu einander senkrecht sind, und deren Länge und deren äusseres Produkt $[e_1 e_2 e_3]$ gleich Eins sind, 224 einen Normalverein nennen. Die † Gesetze der inneren Multiplikation ergeben sich dann unmittelbar aus dem Begriff; namentlich

$$[a \mid b] = [b \mid a];$$

$$[a \mid b] = 0,$$

wenn a auf b senkrecht;

$$a^2 = \mathfrak{a}^2,$$

wenn $\mathfrak{a}$ die Länge von a,

$$[a \mid b] = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3,$$

wenn

$$a = \mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3,$$

$$b = \mathfrak{b}_1 e_1 + \mathfrak{b}_2 e_2 + \mathfrak{b}_3 e_3$$

ist und e_1, e_2, e_3 einen Normalverein bilden. Will man eine Einheit eines Normalvereins als Vielfachensumme von den Einheiten eines andern ausdrücken, so ergeben sich die Koefficienten unmittelbar als innere Produkte dieser letzteren drei Einheiten in die erstgenannte, zum Beispiel

$$e_1 = [e_1 \mid \varepsilon_1]\varepsilon_1 + [e_1 \mid \varepsilon_2]\varepsilon_2 + [e_1 \mid \varepsilon_3]\varepsilon_3.$$

In der That, setzt man

$$e_1 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3,$$

so erhält man durch innere Multiplikation mit ε_1 unmittelbar $[e_1 \mid \varepsilon_1] = x$, da $[\varepsilon_2 \mid \varepsilon_1]$, $[\varepsilon_3 \mid \varepsilon_1] = 0$ und $\varepsilon_1^2 = 1$ ist, und ebenso

$$[e_1 \mid \varepsilon_2] = y,$$
$$[e_1 \mid \varepsilon_3] = z,$$

also

$$e_1 = [e_1 \mid \varepsilon_1]\varepsilon_1 + [e_1 \mid \varepsilon_2]\varepsilon_2 + [e_1 \mid \varepsilon_3]\varepsilon_3.$$

Es hat nicht die geringsten Schwierigkeiten, die durch diesen Kalkül erhaltenen Gleichungen in algebraische Gleichungen zu verwandeln. Man hat dann nur ein beliebiges Koordinatensystem zu Grunde zu legen, auf den drei Koordinatenaxen drei Strecken e_1, e_2, e_3 anzunehmen und jede in einer Gleichung vorkommende Strecke als Vielfachensumme von e_1, e_2, e_3, also in der Form

$$\mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3,$$

und jeden darin vorkommenden Flächenraum in der Form

$$\mathfrak{a}_1[e_2 e_3] + \mathfrak{a}_2[e_3 e_1] + \mathfrak{a}_3[e_1 e_2]$$

darzustellen, wobei die Zahlen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Koordinaten dort der Strecke, hier des Flächenraums heissen mögen, so erhält man schliesslich Gleichungen, in welchen entweder gar keine geometrischen Grössen mehr vorkommen, oder welche in den Formen

$$\mathfrak{B}_1 e_1 + \mathfrak{B}_2 e_2 + \mathfrak{B}_3 e_3 = 0$$

oder

$$\mathfrak{B}_1[e_2 e_3] + \mathfrak{B}_2[e_3 e_1] + \mathfrak{B}_3[e_1 e_2] = 0$$

erscheinen, wo die $\mathfrak{B}$ nur Funktionen der Koordinaten sind. Aus jeder solchen Gleichung entspringen dann die drei Gleichungen

$$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_3 = 0.$$

Für das Differentiiren und Integriren reichen die gewöhnlichen Definitionen aus. In der Mechanik kommen als unabhängige Veränderliche ausser der Zeit t nur Raumgrössen vor. Es ist äusserst bequem hiernach die Differentiale verschieden zu bezeichnen. Ich bezeichne den Differentialquotienten nach der Zeit, wobei nur diejenigen Grössen als konstant betrachtet werden, welche ausdrücklich als in der Zeit sich nicht ändernd festgesetzt sind, mit δ, sodass, wenn zum Beispiel die Strecke x in einer echten Reihe ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 454),

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

dargestellt ist, in welcher $a_0, a_1, a_2 \cdots$ Strecken sind, die sich in der Zeit nicht ändern,

$$\delta x = a_1 + 2a_2 t + \cdots$$

ist.

Dagegen bezeichne ich die Differentiale von Funktionen räumlicher Grössen, bei welchen die Zeit als konstant gesetzt wird, im Allgemeinen mit d. Auch der Begriff der partiellen Differentialquotienten der Funktionen räumlicher Grössen lässt sich (wie es in $\mathfrak{A}_2$ Nr. 436 ff. geschehen ist) genau ebenso feststellen, wie für die Funktionen algebraischer Grössen. Doch wähle ich den zwar etwas umständlicheren, 225 aber, wie † ich glaube, den Lesern leichter zugänglichen Weg der Reduktion auf partielle Differentialquotienten von Funktionen algebraischer Grössen. Ich lege einen Normalverein e_1, e_2, e_3 zu Grunde und drücke die Strecken $x, y, \cdots$, von denen eine algebraische Funktion f abhängen soll, in Koordinaten durch die Strecken jenes Vereins aus, nämlich

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3,$$
u. s. w.,

so wird f eine Funktion dieser Koordinaten x_1, x_2, u. s. w. Sind nun $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ u. s. w. die zu dem Verein sämmtlicher Koordinaten gehörigen partiellen Differentialquotienten ($\mathfrak{A}_2$ Nr. 436), so verstehe ich unter dem partiellen Differentialquotienten von f nach der Strecke x, geschrieben $\frac{\partial}{\partial x} f$, die Strecke

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3.$$

Es folgt hieraus sogleich, dass

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} f \mid dx\right] = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

sei. Es bleibt aber nun zu zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial x} f$, dessen Begriff hier an den Normalverein e_1, e_2, e_3 geknüpft war, ganz unverändert bleibt, wenn man statt des letzteren einen beliebigen andern Normalverein $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ zu Grunde legt. Es sei

$$x = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3,$$

also

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \xi_1 \varepsilon_1 + \xi_2 \varepsilon_2 + \xi_3 \varepsilon_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung innerlich mit e_1, so erhält man

$$x_1 = \xi_1[\varepsilon_1 \mid e_1] + \xi_2[\varepsilon_2 \mid e_1] + \xi_3[\varepsilon_3 \mid e_1],$$

da

$$e_1^2 = 1, \quad [e_1 \mid e_2] = [e_1 \mid e_3] = 0$$

ist; und hieraus erhält man die Werthe für x_2 und x_3, indem man statt e_1 beziehlich e_2 und e_3 setzt. Somit wird

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = [\varepsilon_1 \mid e_1],$$

überhaupt

$$\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} = [\varepsilon_s \mid e_r].$$

Nun ist

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}[\varepsilon_1 \mid e_1] + \frac{\partial f}{\partial x_2}[\varepsilon_1 \mid e_2] + \frac{\partial f}{\partial x_3}[\varepsilon_1 \mid e_3],$$

und hieraus erhält man $\frac{\partial f}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f}{\partial \xi_3}$, indem man ε_2 und ε_3 statt ε_1 setzt also wird

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\varepsilon_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}([\varepsilon_1 \mid e_1]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_1]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_1]\varepsilon_3) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_2}([\varepsilon_1 \mid e_2]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_2]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_2]\varepsilon_3) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_3}([\varepsilon_1 \mid e_3]\varepsilon_1 + [\varepsilon_2 \mid e_3]\varepsilon_2 + [\varepsilon_3 \mid e_3]\varepsilon_3) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}e_3$$

nach dem für die Umwandlung der Normalvereine erwiesenen Satze, 226 das heisst der Werth des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial x} f$ ist unabhängig von dem zu Grunde gelegten Normalvereine.

§ 2. Grundgesetz der Mechanik.

Wenn x die Strecke bezeichnet, die von einem festen Punkte nach dem sich bewegenden Punkte gezogen ist, so ist unmittelbar klar, dass δx die Geschwindigkeit dieses Punktes ihrer Grösse und Richtung nach, und $\delta^2 x$ in gleicher Weise die Beschleunigung oder Bewegungsänderung desselben darstellt*). Nach dem Beharrungsgesetz mufs jede Aenderung in der Bewegung eines materiellen Punktes einer auf ihn einwirkenden Ursache zugeschrieben werden. Es sei die Einwirkung dieser Ursache gleich der Strecke p, so haben wir die Gleichung

$$(1) \qquad \delta^2 x = p.$$

*) Noch einfacher wäre es, x unmittelbar als den sich bewegenden Punkt zu setzen. Doch verspare ich dies auf einen späteren Aufsatz, in welchem die Rechnung mit Punkten dargestellt werden soll.

Ist zum Beispiel diese Einwirkung konstant gleich der Strecke g, so erhalten wir durch Integration der Gleichung

$$\delta^2 x = g$$

unmittelbar

$$\delta x = c + gt,$$

wo c eine willkürliche konstante Strecke (die Anfangsgeschwindigkeit) ist, und durch abermalige Integration

$$x = b + ct + \tfrac{1}{2} g t^2,$$

wo b abermals eine konstante Strecke (der Anfangswerth von x) ist. Diese Gleichungen enthalten die gewöhnlichen Wurfgesetze in allgemeinster Form.

Das sogenannte Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte lässt sich so ausdrücken: Wenn die Einwirkungen mehrerer Ursachen auf den Punkt x einzeln genommen gleich den Strecken $p_1, p_2, \cdots$ sind, so ist die gleichzeitige Einwirkung p aller jener Ursachen gleich der Summe dieser Strecken,

$$p = p_1 + p_2 + \cdots.$$

Es gilt also die Gleichung (1) auch noch, wenn p die Summe aller Einwirkungen ist, welche verschiedene Ursachen gleichzeitig auf den bewegten Punkt üben.

Einfache Kraft nenne ich eine Ursache, welche in einem materiellen Punkte in der Art ihren Sitz hat, dass die Einwirkung dieser Ursache auf einen andern materiellen Punkt nur von der gegenseitigen Lage dieser Punkte abhängt, hingegen von dem umgebenden Raume ganz unabhängig ist. Wenn also ein materieller Punkt A auf einen andern B die Einwirkung BC übt, und man die Figur ABC beliebig im Raume nach $A_1B_1C_1$ verlegt, so aber, dass ABC kongruent mit $A_1B_1C_1$ bleibt, so muss B_1C_1 die Einwirkung von A_1 auf B_1 bleiben. Hieraus folgt, dass BC in der unendlichen geraden Linie AB liegen 227 muss. † Denn wäre dies nicht der Fall, sondern bildeten A, B, C ein Dreieck, und man drehte dies um die Axe AB um beliebigen Winkel in die Lage ABC_1, so müsste A auf B die Einwirkung BC_1 üben, was mit der Einwirkung BC in Widerspruch ist, also kann die Kraft nur anziehend oder abstossend wirken. Aber noch mehr, wenn die Punkte A und B von ganz gleicher Beschaffenheit sind, so muss man auch A mit B vertauschen können, ohne die Wirkung zu ändern. Uebt nun A auf B die (anziehende oder abstossende) Wirkung BC, und man dreht ABC um den Mittelpunkt von AB in die Lage A_1B_1, so dass A_1 auf B und B_1 auf A fällt, und sei C_1 der Punkt, auf den dann C fällt, so muss B_1C_1, das heisst AC_1, nicht bloss als Einwirkung

des Punktes A_1 auf B_1, sondern auch des Punktes B auf A aufgefasst werden können, das heisst die Einwirkung muss gegenseitig und die beiden Einwirkungen müssen einander entgegengesetzt gleich sein. Auch kann die Grösse dieser Einwirkungen, wenn die materiellen Punkte dieselbe Beschaffenheit beibehalten, nur eine Funktion der gegenseitigen Entfernung sein*). Wenn nun A und B zwar nicht ganz gleiche Beschaffenheit haben, aber doch A auf B die entgegengesetzt gleiche Wirkung übt wie B auf A, so nennen wir A und B an Masse gleich. Welche Masse wir als Einheit der Massen zu Grunde legen, ist an sich gleichgültig. Nachdem aber diese Einheit festgesetzt ist, so setzen wir die Kraft der Beschleunigung gleich, welche sie der Masse 1 mittheilt. Daher können wir in der Gleichung (1) den Endpunkt von x als einen Punkt von der Masse 1 setzen und p als die Kraft oder als die Summe der Kräfte, die auf ihn wirken. In diesem Sinne können wir die Gleichung (1) als die Grundgleichung der Mechanik setzen.

§ 3. Bewegung eines freibeweglichen Vereins materieller Punkte.

Ich unterscheide innere und äussere Kräfte in Bezug auf den Verein. Innere Kräfte sind solche, mit denen ein Punkt des Vereins auf einen andern Punkt desselben Vereins wirkt, äussere die übrigen. Ich nehme zuerst alle Punkte des Vereins als von gleicher Masse und zwar von der Masse 1 an. Nun seien $x_1, \cdots x_m$ die von dem festen Punkte nach den beweglichen Punkten des Vereins gezogenen Strecken, p_1 die Summe aller Kräfte, die auf den ersten Punkt wirken, u. s. w., so hat man nach (1) die m Gleichungen

$$\delta^2 x_1 = p_1, \cdots, \quad \delta^2 x_m = p_m,$$

diese addirt geben

$$\delta^2 x_1 + \cdots + \delta^2 x_m = p_1 + \cdots + p_m.$$

Die inneren Kräfte, da sie paarweise entgegengesetzt gleich sind, heben sich bei der Addition weg, folglich können wir hier $p_1, \cdots p_m$ als äussere Kräfte betrachten. Nun sei s die Strecke, die von dem festen Punkte nach dem Schwerpunkte des Vereins gezogen ist, und $y_1, \cdots y_m$ die Strecken, die von dem Schwerpunkt nach den Punkten des Vereins gezogen sind, so ist nach der Definition des Schwerpunktes [228]

$$y_1 + \cdots + y_m = 0.$$

Nun ist aber

*) Es liegt hierin schon, dass ich die Kräfte, mit welchen die in elektrischen Strömen bewegten Elektricitäten wirken, nicht für einfache Kräfte halten kann.

$$x_1 = s + y_1, \cdots, \quad x_m = s + y_m,$$

also

$$x_1 + \cdots + x_m = ms,$$

worin zugleich die Konstruktion des Schwerpunktes liegt, also

$$\delta^2 x_1 + \cdots + \delta^2 x_m = \delta^2(x_1 + \cdots + x_m) = m\delta^2 s,$$

und so erhält man aus obiger Gleichung

$$\delta^2 s = \frac{1}{m} p, \tag{2}$$

wo p die Summe aller äusseren Kräfte und m die Masse des Vereins ist.

Dies ist die Gleichung der Bewegung des Schwerpunktes. Sie kann uns zugleich als Gleichung für die Bewegung eines Punktes von der Masse m gelten und wir könnten von nun an auch Punkte von ungleicher Masse annehmen, doch behalten wir der Einfachheit wegen, ohne an Allgemeinheit etwas einzubüssen, auch jetzt Punkte von der Masse 1 bei. Führen wir in die Gleichung für die Bewegung des ersten Punktes statt x_1 seinen Werth $s + y_1$, statt $\delta^2 x_1$ also $\delta^2 s + \delta^2 y_1$ und statt $\delta^2 s$ den aus (2) gefundenen Werth ein, so erhalten wir

$$\delta^2 y_1 = p_1 - \frac{1}{m} p, \cdots, \delta^2 y_m = p_m - \frac{1}{m} p \tag{3}$$

als Gleichungen für die relativen Bewegungen eines beliebigen Vereins in Bezug auf den Schwerpunkt des Vereins.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\delta^2 x_1 = p_1$$

äusserlich mit x_1, so erhält man links

$$[x_1 \delta^2 x_1],$$

dies ist aber das Zeitdifferential von

$$[x_1 \delta x_1],$$

da bei der Differentiation das andere Glied

$$[\delta x_1 \delta x_1]$$

nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation Null ist. Also erhält man

$$\delta[x_1 \delta x_1] = [x_1 p_1].$$

Bildet man dieselben Gleichungen für die andern Punkte und addirt, so erhält man mit Anwendung der Summenbezeichnung

$$\delta \Sigma[x \delta x] = \Sigma[xp]. \tag{4}$$

Auch hier heben sich die innern Kräfte weg; denn es sei zum Beispiel

$$\lambda(x_2 - x_1)$$

die Kraft, mit der der erste Punkt auf den zweiten wirkt, so ist die Wirkung, die dieser auf jenen übt, die entgegengesetzte, also

$$\lambda(x_1 - x_2),$$

also in der Summe auf der rechten Seite

$$[x_1 \,.\, \lambda(x_2 - x_1)] + [x_2 \,.\, \lambda(x_1 - x_2)] = \lambda[x_1 x_2] + \lambda[x_2 x_1] = 0,$$

da

$$[x_2 x_1] = -[x_1 x_2]$$

ist. Also heben sich alle inneren Kräfte weg. Ebenso auch die nach dem Anfangspunkt der x gerichteten Kräfte. Denn ist λx_1 eine solche auf den ersten Punkt wirkende Kraft, so wird

$$[x_1 \,.\, \lambda x_1] = 0.$$

Wirken daher keine andern äusseren Kräfte ein, als solche, die nach dem Anfangspunkt der x gerichtet sind, so sagt die Gleichung (4) die Unveränderlichkeit der gesammten Flächenbewegung $\Sigma x \delta x$ aus.

Multiplicirt man in gleicher Weise die Gleichungen (3) äusserlich 229 mit y_1 und so weiter und addirt, so erhält man, da

$$\sum\left[y\,\frac{p}{m}\right] = \frac{1}{m}\,[\Sigma y \,.\, p]$$

vermöge der Eigenschaft des Schwerpunktes null ist,

$$\delta\,\Sigma[y\delta y] = \Sigma[yp], \tag{5}$$

das heisst die Flächengleichung (4) gilt auch, wenn man statt des festen Anfangspunktes der x den beweglichen Schwerpunkt setzt.

Endlich multipliciren wir die Gleichung

$$\delta^2 x_1 = p_1$$

innerlich mit δx_1, so erhalten wir, da

$$\delta[\delta x_1]^2 = 2[\delta^2 x_1 \mid \delta x_1]$$

ist,

$$\tfrac{1}{2}\,\delta[\delta x_1]^2 = [p_1 \mid \delta x_1],$$

oder auf alle Punkte des Vereins angewandt

$$\delta\,\Sigma\tfrac{1}{2}(\delta x)^2 = \Sigma[p \mid \delta x], \tag{6}$$

das heisst die Zunahme der lebendigen Kraft

$$\Sigma\tfrac{1}{2}(\delta x)^2$$

während einer Zeit ist gleich der Arbeit

$$\Sigma[p \mid \delta x]$$

aller Kräfte während derselben Zeit.

Es ist für die weitere Entwickelung der Gleichung (6) sehr förderlich, die gesammte Kraft p_1, mit welcher mehrere Punkte auf den Punkt x_1 wirken, als partiellen Differentialquotienten nach x_1 von einer

algebraischen Funktion aller dieser Punkte aufzufassen, sodass also, wenn U diese Funktion ist,

$$p_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} U$$

sei. Man kann dann sagen, dass die Kraft p_1 dem Streben*) entspringe, die Funktion U zu vergrössern. Die Vergrösserung nämlich, welche U durch eine unendlich kleine Verschiebung dx_1 erfährt, ist

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} U \mid dx_1\right];$$

diese Vergrösserung ist, wenn dx_1 dieselbe Länge beibehält, am grössten, wenn dx_1 die Richtung des ersten Faktors hat, wie unmittelbar aus der Formel

$$[a \mid b] = ab \cos \angle ab$$

folgt, das heisst die durch die Kraft p_1 bewirkte Bewegung nimmt diejenige Richtung an, in welcher die Funktion U am meisten vergrössert, das heisst das Streben am vollkommensten erfüllt wird. Ebenso wenn der Punkt x_1 seine Lage verändert, dx_1 aber stets dieselbe Länge behält, und die Richtung die des ersten Faktors $\frac{\partial}{\partial x_1} U$ bleibt, so verhält sich die Kraft wie die Vergrösserung von U, das heisst wie die Erreichung des Zieles, welches sie erstrebt. Man kann daher in der That die Kraft p_1 als Aeusserung des Strebens, die Funktion U zu vergrössern auffassen. Bekanntlich wird U das Potential genannt. U zu finden hat keine Schwierigkeit. Betrachten wir zuerst die Kraft p_{21}, mit der ein Punkt x_2 auf einen anderen x_1 wirkt. Diese Kraft lässt sich nach § 2 als Funktion ihrer Entfernung auffassen, also als $f(r)$. Aber um die Richtung mit darzustellen, schreiben wir sie

$$p_{21} = \frac{1}{r} f(r)\,(x_1 - x_2).$$

230 Hier ist r die Länge von $x_1 - x_2$, das heisst

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2,$$

also differentiirt:

$$r\,dr = [(x_1 - x_2) \mid (dx_1 - dx_2)],$$

oder

$$dr = \frac{1}{r}[(x_1 - x_2) \mid (dx_1 - dx_2)],$$

also

$$f(r)\,dr = \frac{1}{r} f(r)[(x_1 - x_2) \mid (dx_1 - dx_2)] = [p_{21} \mid (dx_1 - dx_2)].$$

---

*) Diese Idee des Strebens (der Tendenz) habe ich in der vorher genannten Arbeit vom Jahre 1840 zu Grunde gelegt.

Nun sei

$$\int f(r) \, . \, dr = U_{12},$$

so ist

$$d\,U_{12} = [p_{21} \mid (dx_1 - dx_2)],$$

also

$$\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} = p_{21}$$

und so auch

$$\frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} = p_{12}.$$

Hat man nun auf gleiche Weise zwischen je zwei Punkten einer Schaar die Grössen $U_{r,s}$ aufgestellt, so wird ihre Summe U eine Funktion dieser Punkte, und die Kraft, welche auf einen Punkt x_1 dieser Schaar die übrigen Punkte üben, ist dann

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} U.$$

Für die Einführung dieses Potentiales in Gleichung (6) ist gleichfalls die Unterscheidung in äussere und innere Kräfte wichtig. Es sei V das vollständige innere Potential, das heisst die Summe der Potentiale zwischen je zwei Punkten des Vereins, und U das gesammte äussere Potential, das heisst die Summe der Potentiale zwischen je einem äusseren und inneren Punkte, so lassen die ersteren in der Gleichung (6) eine vollständige Integration zu, die letzteren nur, insofern die äusseren Punkte in der Zeit unveränderlich sind.

In der That, betrachtet man in der Summe

$$\Sigma [p \mid \delta x]$$

der Gleichung (6) die Kräfte p_{12} und p_{21}, mit denen die ersten beiden Punkte aufeinander wirken und das zugehörige Potential U_{12}, so ist

$$[p_{12} \mid \delta x_2] + [p_{21} \mid \delta x_1]$$

der zugehörige Theil jener Summe, also

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} U_{12} \mid \delta x_2\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} U_{12} \mid \delta x_1\right] = \delta U_{12}$$

und dies auf alle inneren Kräfte ausgedehnt, wird der daraus entspringende Theil jener Summe $= \delta V$ und die Gleichung (6) nimmt die Gestalt an:

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2} \Sigma (\delta x)^2 = V + \int \sum \left(\frac{\partial}{\partial x} U \mid \delta x\right).$$

§ 4. Bewegung eines beschränkt beweglichen Vereins.

Die Beschränkung in der Bewegung eines Vereins wird am einfachsten durch Bedingungsgleichungen dargestellt, welchen die bewegten Punkte unterworfen sind. Allein durch diese Gleichungen ist

die Bewegung noch nicht bestimmt. Vielmehr muss man Kräfte annehmen, welche auf die Punkte des Vereins wirken, sobald sich diese 231 auch nur unendlich wenig aus der Lage, die den Gleichungen † entspricht, herausbewegen, und die sie unwiderstehlich in eine Lage zurücktreiben, welche diesen Gleichungen genügt. Auf die nähere Bestimmung diese Kräfte kommt es an. Es sei

$$L = 0$$

eine solche Bedingungsgleichung, so wollen wir die daraus entspringenden Kräfte dem Streben zuschreiben, jene Gleichung

$$L = 0$$

zu erhalten, das heisst einem Potential, welches gleich L oder einer beliebigen Funktion von L etwa $f(L)$ ist. Dies vorausgesetzt ist die Kraft, welche jenes Streben

$$L = 0$$

zu erhalten, auf den Punkt x_1 hervorruft,

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} f(L) = f'(L) \frac{\partial}{\partial x_1} L,$$

wenn $f'(L)$ die abgeleitete Funktion von $f(L)$ ist, oder bezeichnen wir mit λ diese abgeleitete Funktion, so ist die Kraft, die der Punkte x_1 vermöge jenes Strebens erleidet,

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L,$$

die Kraft, die der Punkt x_2 dadurch erleidet

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L$$

und so weiter. Sind nun ausser jener Bedingungsgleichung

$$L = 0$$

noch andere

$$M = 0$$

und so weiter, so entspringen daraus die Kräfte

$$\mu \frac{\partial}{\partial x_1} M, \quad \mu \frac{\partial}{\partial x_2} M, \cdots$$

und die Gleichungen der Bewegung werden nach dem Grundgesetz (1)

$$(8) \quad \begin{cases} \delta^2 x_1 = p_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} M + \cdots \\ \delta^2 x_2 = p_2 + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} L + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} M + \cdots, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \end{cases}$$

wo

$$L = 0, \quad M = 0, \cdots$$

hinreichen, um die Unbekannten $\lambda, \mu, \cdots$ zu bestimmen.

Nun seien $dx_1, dx_2, \cdots$ beliebige Verschiebungen der Punkte $x_1, x_2, \cdots$, welche aber den Gleichungen

$$dL = 0, \quad dM = 0, \cdots$$

genügen. Man multiplicire obige Gleichungen innerlich mit dx_1, dx_2, und so weiter und addire, so fallen, da

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} L \mid dx_1\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} L \mid dx_2\right] + \cdots = dL = 0$$

ist, die Glieder mit $\lambda, \mu, \cdots$ weg und man erhält

$$\Sigma[(\delta^2 x - p) \mid dx] = 0, \tag{9}$$

welche für alle Verschiebungen gilt, die den Gleichungen

$$dL = 0, \quad dM = 0, \cdots$$

genügen.

§ 5. Gleichgewicht und mittlere Bewegung.

Wenn die Kräfte, welche auf einen Verein wirken, nur von der Lage der Punkte des Vereins und nicht zugleich anderweitig von der Zeit abhängen, so ist Gleichgewicht möglich, und die Formeln für das Gleichgewicht sind dann in den obigen Gleichungen enthalten, wenn † man nur die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten aller 232 Punkte des Vereins null setzt, wodurch dann Gleichungen zwischen den Kräften bedingt sind. Sind diese Gleichungen erfüllt, so kann dennoch die Anfangslage der Punkte des Vereins oder ihre Anfangsgeschwindigkeit von der Art sein, dass kein Gleichgewicht entsteht, und dass insbesondere bei sehr geringen Abweichungen des Anfangszustandes von dem Zustande eines sichern Gleichgewichts Schwingungen um diesen Zustand stattfinden. Diesen Eigenschaften des Gleichgewichtes und seiner Störung durch unendlich kleine Schwingungen entspricht nun für den Fall, dass die Kräfte von der Zeit als solcher abhängen, ein Zustand der mittleren Bewegung, um welchen wieder, wenn dieser Zustand der mittleren Bewegung ein sicherer ist, kleine Schwingungen stattfinden können, die auch im Laufe der Zeit ein gewisses Maximum nicht überschreiten.

Mittlere Bewegung eines Vereins, der von gegebenen (in der Zeits veränderlichen) Kräften getrieben wird, nenne ich diejenige Bewegung, bei welcher unter allen von den verschiedenen Anfangszuständen abhängigen Bewegungen die kleinste Beweglichkeit stattfindet, oder genauer ausgedrückt, bei welcher die Summe der während einer hinreichend grossen Zeit thätigen lebendigen Kräfte ein Minimum ist. Ist

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma(\delta x)^2$$

(immer die Punkte des Vereins an Masse gleich gedacht) die lebendige Kraft, also $T\partial t$ die während des Zeitelements ∂t thätige lebendige Kraft, so ist $\int T dt$ zwischen den Grenzen

$$t = 0 \quad \text{und} \quad t = t$$

die während dieser Zeit thätige gesammte lebendige Kraft. Für die mittlere Bewegung soll also jenes Integral, bei hinreichend grossem t, kleiner sein als für jede andre Bewegung des Systems, und auch kleiner bleiben als solche, wenn t von da ab beliebig wächst. Für lineäre Gleichungen der Bewegung knüpfe ich den Begriff der mittleren Bewegung an den der mittleren Integration lineärer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, wähle jedoch als Beispiel lineäre Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es seien n Zahlgrössen $u_1, \cdots u_n$, abhängig gedacht von einer unabhängigen Zahlgrösse t, und seien die Differentiale jener Grössen nach t mit δ bezeichnet, und sei jene Abhängigkeit partiell bestimmt durch die n Gleichungen

$$(10^*) \quad \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1}\delta u_1 + \cdots + a_{1,n}\delta u_n + b_{1,1}u_1 + \cdots + b_{1,n}u_1 = f_1 t \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \delta^2 u_n + a_{n,1}\delta u_1 + \cdots + a_{n,n}\delta u_n + b_{n,1}u_1 + \cdots + b_{n,n}u_n = f_n t, \end{cases}$$

wo die a und b konstante Zahlgrössen sind.

Die allgemeine Integration dieser Gleichungen ist bekannt. Doch wird es für die klare Aussonderung der mittleren Integration nothwendig sein, die allgemeine Integration übersichtlich darzustellen. Zunächst ist klar, dass man die ft in beliebige Glieder zerlegen, die allgemeinen Integrale in Bezug auf diese Glieder einzeln nehmen und die [238] so erhaltenen Integrale addiren kann. Ich zerlege die ft in Exponentialglieder, deren Exponenten der Zeit proportional sind, und setze daher als die zu integrirenden Gleichungen zunächst

$$(10) \quad \begin{cases} \delta^2 u_1 + a_{1,1}\delta u_1 + a_{1,n}\delta u_n + b_{1,1}u_1 + \cdots + b_{1,n}u_n = g_1 e^{\varkappa t} \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdots \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \delta^2 u_n + a_{n,1}\delta u_1 + a_{n,n}\delta u_n + b_{n,1}u_1 + \cdots + b_{n,n}u_n = g_n e^{\varkappa t}, \end{cases}$$

wo $g_1, \cdots g_n$ konstant sind. Man denke sich auch die u in solchen Gliedern dargestellt. Dann treten sogleich zwei Arten dieser Glieder hervor, nämlich solche mit der Exponentialgrösse $e^{\varkappa t}$ und solche mit $e^{\lambda t}$, wo λ von $\varkappa$ verschieden, aber noch zu suchen ist. Die erstgenannten Glieder bilden das mittlere Integral und lassen sich unmittelbar finden, die letztgenannten hängen von der Lösung einer Gleichung des $2n$-ten Grades ab. Die mittlere Integration giebt

$$u_1 = y_1 e^{\varkappa t}, \cdots, \; u_n = y_n e^{\varkappa t},$$

wo die $y_1, \cdots y_n$ durch die n Gleichungen

$$(11)\quad\begin{cases} \varkappa^2 y_1 + \varkappa a_{1,1} y_1 + \cdots + \varkappa a_{1,n} y_n + b_{1,1} y_1 + \cdots + b_{1,n} y_n = g_1 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \varkappa^2 y_n + \varkappa a_{n,1} y_1 + \cdots + \varkappa a_{n,n} y_n + b_{n,1} y_1 + \cdots + b_{n,n} y_n = g_n \end{cases}$$

genau bestimmt sind, falls nicht, was unten zu besprechen ist, die Determinante der Koefficienten der $y_1, \cdots y_n$ null sein sollte. Setzt man hingegen

$$u_1 = z_1 e^{\lambda t}, \cdots, \quad u_n = z_n e^{\lambda t},$$

wo λ nicht gleich $\varkappa$ ist, so ergiebt sich ein entsprechendes Gleichungssystem wie das obige (11), mit dem Unterschiede, dass λ, z statt $\varkappa, y$ eintritt und die rechten Seiten null sind. Daraus folgt, dass die Determinante der Koefficienten von $z_1, \cdots z_n$ null sein muss. Das giebt für λ die oben angedeutete Gleichung des $2n$-ten Grades. Für jeden der $2n$ Werthe $\lambda_1, \cdots \lambda_{2n}$, welche dieser Gleichung des $2n$-ten Grades genügen, sind dann die zugehörigen Verhältnisse der z bestimmt, und dadurch ist dann die allgemeine Integration vollendet. Nur wenn $\varkappa$ einem der $2n$ Werthe $\lambda_1, \cdots \lambda_{2n}$ gleich wird, tritt der oben erwähnte Fall ein, dass die $y_1, \cdots y_n$ der mittleren Integration unendlich oder unbestimmt werden; in diesem Falle kann man $\varkappa$ zunächst unendlich wenig von jenem Werthe λ verschieden setzen und in Bezug auf dieses $\varkappa$ die mittlere Integration bestimmen. Immer bleibt die mittlere Integration von der Lösung jener Gleichung des $2n$-ten Grades unabhängig.

Um aber zu den Gleichungen der Bewegung übergehen zu können, müssen wir den Gleichungen (10) noch eine andere Form geben. Denn da die Glieder $ge^{\varkappa t}$, welche die Kräfte darstellen sollen, bei reellem $\varkappa$ mit t unendlich werden, so entsprechen sie unter dieser Voraussetzung nicht dem Fall der Natur. Man setze daher statt $ge^{\varkappa t}$ die zwei Glieder

$$c \cos \varkappa t + c' \sin \varkappa t,$$

das heisst

$$\frac{c - c'i}{2} e^{i\varkappa t} + \frac{c + c'i}{2} e^{-i\varkappa t}.$$

Diese beiden Glieder unterscheiden sich † nur durch das Vorzeichen 234 von $i = \sqrt{-1}$. Setzt man nun in (10) zunächst statt $g_1 e^{\varkappa t}$ ein

$$\frac{c_1 - c_1'i}{2} e^{i\varkappa t}$$

und so weiter, so hat man in (11) statt g_1 zu setzen

$$\frac{c_1 - c_1'i}{2}$$

und so weiter, ferner $i\varkappa$ statt $\varkappa$ und $-\varkappa^2$ statt $\varkappa^2$, und es werden dann die durch (11) bestimmten y imaginär, sie seien $v + wi$, so wird

$$u_1 = (v_1 + w_1 i) e^{i\varkappa t}, \cdots, \quad u_n = (v_n + w_n i) e^{i\varkappa t}.$$

Setzt man dann zweitens in (10)

$$\frac{c+c'i}{2}e^{-i\varkappa t}$$

statt g, so gehen daraus Werthe hervor, die sich von den obigen für $u_1, \cdots u_n$ nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, sie seien mit $u_1', \cdots u_n'$ bezeichnet, also

$$u_1' = (v_1 - w_1 i)e^{-i\varkappa t}, \cdots, u_n' = (v_n - w_n i)e^{-i\varkappa t};$$

also wird

$$u_1 + u_1' = 2v_1 \cos \varkappa t - 2w_1 \sin \varkappa t = a_1 \cos \varkappa t + b_1 \sin \varkappa t,$$

wenn

$$2v_1 = a_1$$

und

$$-2w_1 = b_1$$

gesetzt wird.

Es ist nun nachzuweisen, dass bei der Bewegung, die durch lineäre Gleichungen der Form (10) bestimmt ist, die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert, wie sie oben definirt ist.

Bei der Bewegung eines Vereins von m gleich schweren Punkten im Raume wird das n der Gleichungen (10) und (11) gleich $3m$, die Gleichung in λ also vom $6m$-ten Grade. Wir nehmen senkrechte Koordinatenaxen an. Dann wird die gesammte lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\delta u^2,$$

also

$$\int T\delta t = \tfrac{1}{2}\Sigma\int\delta u^2 dt,$$

wo sich die Summe auf

$$u_1, \cdots u_{3m}$$

bezieht. Nun besteht u_1 bei der allgemeinen Integration teils aus den Gliedern der mittleren Integration, welche von der Form

$$a_1 \cos \varkappa t + b_1 \sin \varkappa t$$

sind, und aus $6m$ Gliedern der Form*)

$$ze^{\lambda_1 t};$$

also δu_1 enthält dann Glieder der Form

$$\varkappa b_1 \cos \varkappa t - \varkappa a_1 \sin \varkappa t$$

und der Form

$$\lambda_1 z e^{\lambda_1 t},$$

und δu_1^2 enthält dann die Quadrate dieser Glieder und die doppelten Produkte je zweier. Man sieht sogleich, dass die Glieder der Form

$$\lambda_1 z e^{\lambda_1 t}$$

*) Die Koefficienten von $e^{\lambda_1 t}$ enthalten eine und dieselbe multiplikative willkürliche Constante, ebenso die von $e^{\lambda_2 t}$ u. s. w. (A. d. H.)

bei reellem λ_1 mit unendlichem t selbst unendlich werden, also $\int T dt$*) gewiss kleiner ist, wenn diese Glieder fehlen, als wenn sie vorhanden sind. Wir können also für den Nachweis der mittleren Bewegung diese Glieder weglassen; dasselbe gilt, wenn

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$

ist, und α nicht null ist. Es sind also nur die Glieder zu berücksichtigen, wo

$$\lambda_1 = \beta i$$

ist; dann ist ein anderer Werth von λ etwa

$$\lambda_2 = -\beta i$$

und die hieraus entspringenden reellen Glieder in u_1 werden von der Form

$$p \cos \beta t + q \sin \beta t,$$

also in δu_1 von der Form

$$\beta (q \cos \beta t - p \sin \beta t),$$

also von entsprechender Form, wie die Glieder der mittleren Integration.

Betrachten wir zuerst die Quadrate, zum Beispiel

$$(\varkappa b_1 \cos \varkappa t - \varkappa a_1 \sin \varkappa t)^2,$$

also in $T dt$ das Glied

$$\tfrac{1}{2} \varkappa^2 (b_1 \cos \varkappa t - a_1 \sin \varkappa t)^2 dt,$$

so giebt dies

$$\tfrac{1}{4} \varkappa^2 [b_1^2 (1 + \cos 2\varkappa t) dt + a_1^2 (1 - \cos 2\varkappa t) dt - 2 a_1 b_1 \sin 2\varkappa t dt].$$

Dies giebt integrirt

$$\tfrac{1}{4} \varkappa^2 (a_1^2 + b_1^2) t + P,$$

wo P lauter endliche periodische Glieder liefert. Ferner betrachten wir das doppelte Produkt zweier solcher Glieder, zum Beispiel

$$\varkappa (b_1 \cos \varkappa t - a_1 \sin \varkappa t)$$

und

$$\beta (q \cos \beta t - p \sin \beta t),$$

so giebt das in $T dt$ das Glied

$$\varkappa \beta dt (b_1 q \cos \varkappa t \cos \beta t + a_1 p \sin \varkappa t \sin \beta t - b_1 p \cos \varkappa t \sin \beta t - a_1 q \sin \varkappa t \cos \beta t) \quad 235$$

$$= \varkappa \beta dt \Big[\frac{b_1 q - a_1 p}{2} \cos(\varkappa + \beta) t + \frac{b_1 q + a_1 p}{2} \cos(\varkappa - \beta) t - \\ - \frac{b_1 p + a_1 q}{2} \sin(\varkappa + \beta) t + \frac{b_1 p - a_1 q}{2} \sin(\varkappa - \beta) t \Big],$$

also wenn $\varkappa$ nicht gleich β ist, so liefert dies lauter endliche periodische

*) In dem Abdruck in den Math. Ann. steht $\sqrt{T dt}$; doch ist dies wohl ein Druckfehler. (A. d. H.)

Glieder. Nun können wir t so gross annehmen, dass die periodischen Glieder gegen die Glieder der Form

$$\tfrac{1}{4}\varkappa^2(a_1^2+b_1^2)t, \cdots$$

verschwinden; dann wird

$$\int T\,dt = \tfrac{1}{4}\Sigma\varkappa^2(a^2+b^2)t + \tfrac{1}{4}\Sigma\beta^2(p^2+q^2)t,$$

wo die erste Summe sich auf alle Glieder der mittleren Integration bezieht, die letzte auf die übrigen. Hier sind die a und b von unveränderlichem Werth, hingegen p und q können null sein, also wird für hinlänglich grosses t das Integral

$$\int T\,dt$$

am kleinsten, wenn die p, q sämmtlich null sind, das heisst das Integral das mittlere ist. Es ist dadurch nachgewiesen, dass bei linearen Differentialgleichungen der Bewegung die mittlere Integration zugleich die mittlere Bewegung liefert.

Ich nenne ein Glied vor der Form

$$a\cos\varkappa t + b\sin\varkappa t,$$

wo $\varkappa$ positiv ist, mögen nun a und b Zahlen oder Strecken sein, ein elliptisches Glied und $\varkappa$ seinen Zeiger. In der That, sind hier a und b Strecken von ungleicher Richtung und wird

$$a\cos\varkappa t + b\sin\varkappa t$$

als Strecke r dargestellt, die von einem festen Punkte ausgeht, so beschreibt der Endpunkt in der Zeit $2\pi:\varkappa$ eine Ellipse, und zwar so, dass die Strecke r selbst in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, nämlich in der Zeit dt den Raum

$$\tfrac{1}{2}[ab]\varkappa\,dt;$$

die Strecken a und b sind konjugirte Halbmesser der Ellipse. In der That, setzt man

$$\cos\varkappa t = u, \quad \sin\varkappa t = v,$$

so wird jener Radius

$$r = ua + vb$$

und

$$u^2 + v^2 = 1,$$

was die Gleichung der Ellipse mit den konjugirten Halbmessern a und b ist. Ferner beschreibt der Endpunkt von r im Zeitelemente dt die Strecke

$$\delta r\,.\,dt,$$

das heisst

$$(b\cos\varkappa t - a\sin\varkappa t)\varkappa\,dt$$

und r selbst den Flächenraum

$$\tfrac{1}{2}[r\delta r]\,dt,$$

das heisst

$$\tfrac{1}{2}[(a\cos\varkappa t + b\sin\varkappa t)\cdot(b\cos\varkappa t - a\sin\varkappa t)]\,\varkappa dt;$$

das eingeschlossene äussere Produkt giebt, da

$$[aa] = [bb] = 0,\quad [ab] = -[ba]$$

und

$$\cos^2\varkappa t + \sin^2\varkappa t = 1$$

ist, der Werth $[ab]$, also ist der im Zeitelemente dt beschriebene Flächenraum

$$= \tfrac{1}{2}[ab]\,\varkappa\,dt.$$

Wir können nun das Gesetz der mittleren Bewegung für unsern Fall so aussprechen: Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineäre Differentialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkte nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Koefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt, und ausser diesen Gliedern treten bei der mittleren Bewegung keine andern hervor.

Ich bemerke noch, dass sich die Sicherheit oder Unsicherheit der mittleren Bewegung aus den oben entwickelten Principien aufs leichteste ableiten lässt. 236

§ 6. Anwendung auf die Theorie der Ebbe und Fluth.

Wir betrachten auch hier das der Ebbe und Fluth unterworfene System zunächst als einen Verein von m Punkten, deren Massen 1 sind. Dann gilt für die relative Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt die Gleichung (3) in § 3, nämlich

$$\delta^2 y_1 = p_1 + q_1 - \frac{1}{m}p$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\delta^2 y_m = p_m + q_m - \frac{1}{m}p,$$

indem ich nämlich die innern Kräfte q_1 u. s. w. von den äusseren p_1 u. s. w. gesondert und

$$p_1 + \cdots + p_m = p$$

gesetzt habe. Nun sei das System einer gleichförmigen Rotation um eine feste durch den Schwerpunkt gehende Axe unterworfen und angenommen, wie es bei der Theorie der Ebbe und Fluth in der hier nur berücksichtigten ersten Annäherung gestattet ist, dass sich die Punkte

nur unendlich wenig von der Lage, die sie bei jener gleichförmigen Rotation annehmen würden, entfernen. Ferner sei n die Winkelgeschwindigkeit bei jener Drehung, also nt die Drehung während der Zeit t. Es sei eine in der Drehungsebene (also senkrecht gegen die Drehungsaxe) gelegene Strecke a angenommen, so verwandelt sie sich durch die Drehung um den Winkel nt in

$$a \cos nt + a' \sin nt,$$

wo a' senkrecht gegen a in der Drehungsebene nach der positiven Drehungsseite liegt und mit a gleich lang ist. Wir bezeichnen nach bekannter Analogie diese Strecke a' mit ai, wo i die planimetrische Darstellung der $\sqrt{-1}$ ist. Dann verwandelt sich also a in

$$a(\cos nt + i \sin nt) = ae^{int},\text{*)}$$

und es wird dann

$$\delta(ae^{int}) = ae^{int} . in.$$

Nun sei

$$in = \alpha$$

gesetzt, wo α die Winkelgeschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellt. Dann verwandelt sich also a durch jene Drehung in

$$ae^{\alpha t},$$

und es wird

$$\delta(ae^{\alpha t}) = ae^{\alpha t}\alpha,$$

$$\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\alpha^2,$$

wo übrigens $\alpha^2 = -n^2$ wird.

Dieselbe Bezeichnung wende ich auch an, wenn a nicht in der Drehungsebene liegt**), nämlich in der Art, dass, wenn a die Richtung der Drehungsaxe hat,

---

*) Vgl. hiezu die Darstellung der Rotation in der Arbeit, welche unter Nr. III abgedruckt ist. (A. d. H.)

**) Zur Erläuterung diene Folgendes. Für irgend eine Strecke ϱ bezeichne $P\varrho$ die Projektion auf die Drehungsaxe, $S\varrho$ die auf die Drehungsebene, sodass $\varrho = P\varrho + S\varrho$ ist.

Dann geht die Strecke a durch die Drehung in die Strecke $Pa + Sae^{\alpha t}$ über, wie aus dem im Text vorher Bewiesenen folgt. Setzt man diese Strecke $= ae^{\alpha t}$, so wird

$$\delta ae^{\alpha t} = \quad Sa \cdot e^{\alpha t}\alpha$$

$$\delta^2 ae^{\alpha t} = -n^2 Sa \cdot e^{\alpha t}.$$

Kommt man nun überein, unter $\varrho\alpha$ zu verstehen die Strecke $S\varrho \cdot \alpha$, und unter $\varrho\alpha^2$ die Strecke $-n^2 S\varrho$, so kann man sagen, dass

$$\delta ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\alpha$$

$$\delta^2 ae^{\alpha t} = ae^{\alpha t}\alpha^2$$

ist

$$a e^{\alpha t} = a$$

und

$$a \alpha = 0$$

ist. Dies vorausgesetzt drückt dann, wenn a beliebige Richtung hat, $a e^{\alpha t}$ die Strecke aus, in die a übergeht, wenn sich das ganze System um den Winkel αt dreht und es bleibt dann

$$\delta a e^{\alpha t} = a e^{\alpha t} \alpha,$$
$$\delta^2 a e^{\alpha t} = a e^{\alpha t} \alpha^2,$$

wo man aber statt α^2 nicht ohne Weiteres $-n^2$ zu setzen hat.

In diesem Sinne sei nun

$$y_1 = (x_1 + u_1) e^{\alpha t},$$

wo x_1 in der Zeit unveränderlich und u_1 unendlich klein ist. Dann wird

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \delta u_1 e^{\alpha t} + (x_1 + u_1) e^{\alpha t} \alpha, \\ \delta^2 y_1 &= \delta^2 u_1 e^{\alpha t} + 2 \delta u_1 e^{\alpha t} \alpha + (x_1 + u_1) e^{\alpha t} \alpha^2 \\ &= [\delta^2 u_1 + 2 \delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1) \alpha^2] e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Aber wenn sich das ganze System um αt dreht, so drehen sich auch die inneren Kräfte um denselben Winkel, und wir können also statt q_1 schreiben 237

$$q_1' e^{\alpha t}.$$

Somit erhalten wir, wenn man noch mit $e^{-\alpha t}$ multiplicirt, die Gleichung

$$\delta^2 u_1 + 2 \delta u_1 \alpha + (x_1 + u_1) \alpha^2 = q_1' + \left(p_1 - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t}.$$

Nun hängt aber q_1' von der gegenseitigen Entfernung der Punkte, also hier von

$$x_1 + u_1 - (x_r + u_r),$$

das heisst von

$$x_1 - x_r + (u_1 - u_r)$$

ab, wo $u_1 - u_r$ gegen $x_1 - x_r$ unendlich klein ist. Somit sondert sich q_1' in zwei Glieder, von denen das eine die u nicht enthält, das andere eine lineäre Funktion der u ist. Jenes sei mit q_1'' bezeichnet, dieses mit φ_1, so können wir die obigen Gleichungen in je zwei Gleichungen sondern, nämlich

$$x_1 \alpha^2 = q_1'', \cdots, x_m \alpha^2 = q_m'', \tag{12}$$

Dreht man die Strecke $a e^{\alpha t}$ noch weiter um den Winkel $\frac{1}{i} \beta t$, so hat man die Strecke a im Ganzen um den Winkel $\frac{1}{i}(\alpha + \beta) t$ gedreht. Daher ist

$$a e^{\alpha t} \cdot e^{\beta t} = a e^{(\alpha + \beta) t},$$

von welcher Formel im Folgenden Gebrauch gemacht ist (für $\beta = -\alpha$). (A. d. H.)

die den Gleichgewichtszustand bestimmen, und

$$(13)\quad \begin{cases} \delta^2 u_1 + 2\delta u_1 \alpha + u_1 \alpha^2 - \varphi_1 = \left(p_1 - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t} \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \delta^2 u_m + 2\delta u_m \alpha + u_m \alpha^2 - \varphi_m = \left(p_m - \frac{1}{m} p\right) e^{-\alpha t}, \end{cases}$$

welche ganz die Form der im § 5 behandelten Gleichungen haben, und ihre mittlere Integration liefert dann die Bewegung der Ebbe und Fluth. Es kommt nur noch darauf an, die rechten Seiten dieser Gleichungen (13) in elliptischen Gliedern zu entwickeln. Wir nehmen zuerst nur ein Gestirn an, und zwar sei dasselbe nahe kugelförmig und die Entfernung seines Mittelpunktes von dem Schwerpunkte des Systems unendlich gross gegen die Dimensionen des Systems. Die Anziehung, welche eine Kugel durch ihre Gravitation auf einen äusseren Punkt übt, ist dieselbe, als ob alle ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Es sei L diese Anziehung in der Entfernung 1, so ist sie in der Entfernung e gleich

$$\frac{L}{e^2}.$$

Nun sei r die Strecke vom Schwerpunkt des Systems zum Mittelpunkt der Kugel zur Zeit

$$t = 0$$

und sei ϱ die Länge von r, so ist zu dieser Zeit p_1, mit Uebergehung der Glieder von höherem Grade der Kleinheit, der Grösse und Richtung nach

$$= \frac{L(r - x_1)}{(r - x_1)^3}$$

oder

$$= \frac{L(r - x_1)}{(r^2 - 2[r \mid x_1])^{\frac{3}{2}}}.$$

Das giebt entwickelt

$$p_1 = \frac{L}{\varrho^3}\left(r - x_1 + \frac{3[r \mid x_1]}{\varrho^2} r\right).$$

Dann erhält man, da die x vom Schwerpunkt des Systems aus genommen sind und also

$$\Sigma x = 0$$

ist,

$$\frac{1}{m} p = \frac{L}{\varrho^3} r.$$

Folglich wird zur Zeit $t = 0$ die rechte Seite der Gleichung (13) gleich

$$\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[r \mid x_1]}{\varrho^2} r - x_1\right).$$

Nun sei während der Dauer eines Tages die Entfernung des Gestirnes

und seine Deklination als konstant angenommen, während sich seine Rectascension in der Zeit t um βt ändere*), so ist zur Zeit t erstens † r in 238

$$re^{\beta t},$$

zweitens x_1 in

$$x_1 e^{\alpha t}$$

übergegangen, und die rechte Seite der Gleichung (13) wird

$$\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[re^{\beta t} \mid x_1 e^{\alpha t}]}{\varrho^2} re^{\beta t} - x_1 e^{\alpha t}\right) e^{-\alpha t}.$$

Nun ändert sich nach dem Begriff des inneren Produktes der Werth desselben nicht, wenn die beiden Faktoren sich um gleiche Axe und um gleiche Winkel, zum Beispiel um den Winkel $-\beta t$ drehen**) und man erhält, wenn

$$\alpha - \beta = \gamma$$

gesetzt wird, die rechte Seite der Gleichung (13) gleich

$$\frac{L}{\varrho^3}\left(\frac{3[r \mid x_1 e^{\gamma t}]}{\varrho^2} re^{-\gamma t} - x_1\right).$$

Es sei die Länge von x_1 gleich $\mu\varrho$, so wird

$$[r \mid x_1 e^{\gamma t}] = \mu\varrho^2 \cos\varphi,$$

wo φ der Winkel zwischen r und $x_1 e^{\gamma t}$ ist. Es sei η der Winkel, den die Axe a mit r, und ϑ der Winkel, den sie mit x_1 bildet, und sei ω_1 der Winkel, den die Ebene ar mit der Ebene ax_1, also

$$\omega_1 + \gamma t$$

der Winkel, den die Ebene ar mit der Ebene $ax_1 e^{\gamma t}$ bildet***), so ist

$$\cos\varphi = \cos\eta \cos\vartheta + \sin\eta \sin\vartheta \cos(\omega_1 + \gamma t),$$

also erhalten wir obigen Ausdruck

$$= \frac{L}{\varrho^3}\{3\mu[\cos\eta \cos\vartheta + \sin\eta \sin\vartheta \cos(\omega_1 + \gamma t)] re^{-\gamma t} - x_1\},$$

wo man noch statt r setzen kann

$$r_1 + r_2,$$

indem r_1 in der Axe, r_2 im Aequator liegt, also statt $re^{-\gamma t}$ setzen kann

$$r_1 + r_2 e^{-\gamma t}.$$

Setzt man dann auch noch statt

$$\cos(\omega_1 + \gamma t)$$

---

*) Genauer: Aendert sich die Rectascension in der Zeiteinheit um n', so ist $\beta = in'$. (A. d. H.)

**) Besser: Um den Winkel $-n't$ drehen, wobei die Strecken mit $e^{-\beta t}$ multiplicirt werden. (A. d. H.)

***) Richtiger: Da $n - n' = \gamma/i$, so ist dieser Winkel $\omega_1 + \gamma/it$ und im Folgenden unter dem Zeichen cos an die Stelle von γ zu setzen γ/i. (A. d. H.)

seinen Werth

$$\frac{e^{i(\omega_1+\gamma t)}+e^{-i(\omega_1+\gamma t)}}{2}\text{*)},$$

so übersieht man auf der Stelle, dass der ganze Ausdruck aus drei elliptischen Gliedern mit den Zeigern 0, γ und 2γ besteht, wo γ die scheinbare Winkelgeschwindigkeit des Gestirns, also $2\pi:\gamma$ seine scheinbare Umlaufszeit ist**). Tritt nun noch, wie es bei der Ebbe und Fluth der Fall ist, ein zweites Gestirn hinzu, welches auf die Bewegung Einfluss hat, und dessen scheinbare Umlaufszeit $2\pi:\gamma'$ ist, so treten noch zwei elliptische Glieder mit den Zeigern γ' und $2\gamma'$ hinzu. Bezeichnen wir diese fünf elliptischen Glieder für den ersten Punkt mit

$$p_{1,0},\quad p_{1,\gamma},\quad p_{1,2\gamma},\quad p_{1,\gamma'},\quad p_{1,2\gamma'},$$

so wird die erste der Gleichungen (13)

$$(14)\quad \delta^2 u_1+2\delta u_1\alpha+u_1\alpha^2-\varphi_1=p_{1,0}+p_{1,\gamma}+p_{1,2\gamma}+p_{1,\gamma'}+p_{1,2\gamma'}.$$

Daraus ergiebt sich, da bei der Ebbe und Fluth nur die mittlere Bewegung ins Auge gefasst wird, für u_1 gleichfalls eine Summe von fünf elliptischen Gliedern mit denselben Zeigern, also

$$(15)\qquad u_1=u_{1,0}+u_{1,\gamma}+u_{1,2\gamma}+u_{1,\gamma'}+u_{1,2\gamma'},$$

wenn $u_{1,0}$, $u_{1,\gamma}$ u. s. w. elliptische Glieder mit den Zeigern 0, γ u. s. w. darstellen. Entsprechend sind die Gleichungen für jeden andern Punkt. Das erste Glied $u_{1,0}$ giebt an, um welche Strecke die durch die Gestirne bestimmte mittlere Lage des ersten Punktes von seiner Gleichgewichtslage abweicht. Die andern vier Glieder geben die Bewegung des Punktes um seine mittlere Lage an. Es ergiebt sich daraus der Hauptsatz für die Theorie der Ebbe und Fluth:

239 „Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Fluth vollendet, ergiebt sich durch die Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt, und die zwei andern eine halb so grosse Umlaufszeit."

Jedes elliptische Glied enthält vermöge seiner Form

$$a\cos\gamma t+b\sin\gamma t,$$

wo a und b Strecken sind, sechs algebraische Konstanten, also die vier elliptischen Glieder zusammen 24. Sind diese 24 Konstanten für einen Punkt des Meeres durch Beobachtung gefunden, so ist dann

*) Auch hier wäre γ/i für γ zu setzen. (A. d. H.)

**) Besser würde man sagen: Die Zeiger sind $0, \gamma/i$ und $2\gamma/i$, und $\frac{2i\pi}{\gamma}$ ist die scheinbare Umlaufszeit. (A. d. H.)

die Bewegung des Punktes genau bestimmt. Soll aber nur die Höhe, also nur das Sinken und Steigen bestimmt werden, so hat man nur die Projektionen jener Strecken a, b und so weiter auf die vertikale Linie zu beachten, man erhält also dann acht Konstante in Uebereinstimmung mit La Place mécanique céleste IV, 3. {Oeuvres Bd. II, S. 182ff.} Jene 24 Konstanten sind an sich durch die inneren Kräfte (Gravitation und Elasticität) bedingt und also nur dann theoretisch zu bestimmen, wenn die Beschaffenheit des Systems vollständig gegeben ist.

Nimmt man statt der m Punkte eine im Raume stetig verbreitete Materie an, so hat man in den Gleichungen (12) statt $x_1, \cdots x_m$ eine variable Strecke x im Raume zu setzen, und die Gleichung wird

$$x\alpha^2 = q'', \tag{12*}$$

wo q'' eine Funktion von x ist. Diese Gleichung bestimmt das Gleichgewicht des Systems. Dann wird in den Gleichungen (13) und (14) statt $u_1, \cdots u_m$ die von x abhängige Grösse u gesetzt werden müssen und die Gleichung (14) wird

$$\delta^2 u + 2\delta u \,.\, \alpha + u \,.\, \alpha^2 - \varphi = p_0 + p_\gamma + p_{2\gamma} + p_{\gamma'} + p_{2\gamma'}, \tag{14*}$$

wo u, p_0, p_γ, $\cdots$ Funktionen von x sind und φ eine in Bezug auf u lineäre Funktion von x und u ist. Die Gleichung (15) wird dann

$$u = u_0 + u_\gamma + u_{2\gamma} + u_{\gamma'} + u_{2\gamma'}, \tag{15*}$$

wo die elliptischen Glieder zugleich Funktionen von x sind, also zum Beispiel

$$u_\gamma = a_x \cos \gamma t + b_x \sin \gamma t$$

ist, wo a_x, b_x Funktionen von x sind.

Will man die Oberfläche des Meeres haben, wie sie sich durch die Ebbe und Flut zu jeder Zeit gestaltet, so hat man x auf die Punkte der Oberfläche zu beschränken. Dann wird die Gleichung (12*) die Gleichung der Oberfläche beim Gleichgewicht (die äusseren Kräfte Null gesetzt). Wir können diese Gleichung in der Form dargestellt denken, dass x eine Funktion ihrer Richtung $\mathfrak{x}$ wird, das heisst Funktion einer Strecke $\mathfrak{x}$, die mit x gleiche Richtung hat, aber deren Länge 1 ist.

Dies ist die wesentliche Idee der Polarkoordinaten. Die Gleichung der Oberfläche zur Zeit t ergiebt sich dann leicht, da

$$y = x + u$$

war und u gefunden ist. Erhebt man diese Gleichung aufs (innere) Quadrat, so erhält man

$$y^2 = x^2 + 2[x \mid u],$$

240 da wir das letzte Glied u^2 als von † höherer Ordnung der Kleinheit weglassen können. Ist nun z die Projektion von u auf x (oder auf ξ), so erhält man

(16) $$y^2 = x^2 + 2xz$$

als Gleichung der Oberfläche zur Zeit t. Hier besteht z aus fünf elliptischen Gliedern mit den Zeigern 0, γ, 2γ, γ', $2\gamma'$, aber diese elliptischen Glieder haben hier die Form, dass ihre Koefficienten nicht Strecken, sondern Zahlengrössen sind, welche von ξ abhängen.

Es ist in dem Obigen die Ebbe und Flut nur in der ersten Annäherung bestimmt. Will man eine höhere Annäherung erzielen, so muss man dennoch die hier entwickelte Theorie zur Grundlage nehmen, und dann die zweite Annäherung in entsprechender Weise behandeln, wie dies in der Theorie der seculären Störungen der Planeten geschieht.

Stettin, den 31. März 1877.

IIa. Selbstanzeige der Abhandlung:

Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre.

(Koenigsbergers Repertorium Bd. II, S. 62—64. Leipzig 1879.)

62 Die Begriffe der Ausdehnungslehre (von 1862 {Ges. Werke I, 2}), welche in dieser Abhandlung benutzt sind, sind der Begriff der Strecken (n. 216, b) und ihrer Addition (n. 220), ferner des äusseren oder combinatorischen Produktes zweier (n. 254) oder dreier Strecken (n. 262), ferner des inneren Produktes zweier Strecken (n. 188) und endlich der Begriff des partiellen Differentialquotienten einer algebraischen Funktion f von Punkten x_1, x_2, $\cdots$ in Bezug auf einen derselben, zum Beispiel $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ (n. 436 ff.). Aus diesen Begriffen werden nun theils die allgemeinen Gesetze der Mechanik, theils besondere Gesetze, namentlich die der Ebbe und Flut abgeleitet.

Ist nämlich x die Strecke, die von einem willkürlichen, aber festen Punkte nach dem sich bewegenden gezogen ist, und die also diesen Punkt selbst zur Darstellung bringt, und wird der vollständige Differentialquotient nach der Zeit mit δ bezeichnet, so stellt δx die Geschwindigkeit, $\delta^2 x$ die Beschleunigung des Punktes x ihrer Grösse und Richtung nach dar. Ist nun p die Kraft oder die geometrische Summe der Kräfte, die auf den Punkt x, dessen Masse als 1 gesetzt wird, wirken, so erhält man

(1) $$\delta^2 x = p \text{ (Bewegung des einzelnen Punktes).}$$

Hat man einen Verein von Punkten, deren Massen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, 1 gesetzt werden können, so hat man in † Bezug 68 auf den Verein äussere und innere (zwischen den Punkten des Vereins wirkende) Kräfte zu unterscheiden. Die geometrische Summe der inneren Kräfte (das heisst die Summe der als Strecken gedachten Kräfte dieser Art) ist Null. Besteht nun der Verein aus m solchen Punkten, so dass also m die Masse des Vereins ist, so hat man nach dem Obigen die m Gleichungen $\delta^2 x_1 = p_1, \cdots, \delta^2 x_m = p_m$. Stellt nun s den Schwerpunkt des Vereins dar, das heisst ist $x_1 + \cdots + x_m = ms$, so erhält man durch Addition jener m Gleichungen unmittelbar

(2) $$m\delta^2 s = p \text{ (Bewegung des Schwerpunktes)},$$

wo p die geometrische Summe der äusseren Kräfte ist. Setzen wir nun in obigen m Gleichungen $x_1 = s + y_1, \cdots, x_m = s + y_m$ und statt $\delta^2 s$ den gefundenen Werth $p : m$, so erhalten wir

(3) $$\delta^2 y_1 = p_1 - \frac{1}{m} p, \cdots, \delta^2 x_m = p_m - \frac{1}{m} p$$

(Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt).

Multiplicirt man die Gleichung (1) äusserlich mit x, also $[x\delta^2 x] = [xp]$, so kann man statt $[x\delta^2 x]$ auch $\delta[x\delta x]$ schreiben, weil $[\delta x . \delta x]$ nach den Gesetzen der äusseren Multiplikation Null ist, und wendet man dies auf die m Gleichungen des Vereins an und addirt, so erhält man

(4) $$\delta\Sigma[x\delta x] = \Sigma[xp]$$

(Flächenbewegung in Bezug auf einen festen Punkt).

Auch hierbei heben sich die inneren Kräfte weg.

Multiplicirt man ebenso die Gleichungen (3) äusserlich mit $y_1, \cdots y_m$ und addirt, so heben sich, da $y_1 + \cdots + y_m$ nach dem Begriff des Schwerpunktes Null ist, die negativen Glieder fort und es wird

(5) $$\delta\Sigma[y\,dy] = \Sigma[yp]$$

(Flächenbewegung in Bezug auf den Schwerpunkt).

Die Gleichung (1) innerlich mit δx multiplicirt, giebt zunächst $[\delta^2 x \mid \delta x] = [p \mid \delta x]$; aber es ist $[\delta^2 x \mid \delta x] = \frac{1}{2}\delta[\delta x \mid \delta x]$ und wendet man dies auf die m Gleichungen des Vereins an und addirt, so erhält man

$$\delta\Sigma\tfrac{1}{2}[\delta x \mid \delta x] = \Sigma[p \mid \delta x] \quad \text{(Arbeitsgleichung)}.$$

Ich habe gezeigt, dass die einfache Kraft p_{21}, mit der ein Punkt x_2 auf einen andern x_1 wirkt, eine Funktion $f(r)$ der gegenseitigen Entfernung r der beiden Punkte sei und in der Richtung $x_1 - x_2$ liege, ferner dass, wenn U_{12} das Integral von $fr . dr$ ist, dann $p_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} U_{12}$, und $p_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2} U_{12}$ sei. U_{12} heisst das Potential zwi-

schen den Punkten x_1 und x_2. Ist nun V die Summe aller Potentiale
64 zwischen je zwei † Punkten des Vereins, also das vollständige innere Potential, und ist U das gesammte äussere Potential, das heisst die Summe der Potentiale zwischen je einem äusseren und inneren Punkte, so verwandelt sich die Gleichung (6) in

$$(7) \quad \tfrac{1}{2}\Sigma[\delta x \mid \delta x] = V + \int \sum \left[\frac{\partial}{\partial x} U \mid \delta x\right] \quad \text{(Potentialgleichung).}$$

Die Art, wie sodann die Beschränkungen in der Bewegung eines Vereins auf Potentiale zurückgeführt werden, ist von der gewöhnlichen Darstellung nicht wesentlich verschieden. Dagegen ist ganz neu der Begriff der mittleren Integration der Bewegungsgleichungen und seine Anwendung auf die Theorie der Ebbe und Flut.

Mittlere Integration der Bewegungsgleichungen nenne ich diejenige, bei welcher die Beweglichkeit des Vereins am geringsten ist, und die so hervorgehende Bewegung nenne ich mittlere Bewegung. Bei der Theorie der Ebbe und Flut wird nun diese letztere gesucht.

Um die Resultate einfach aussprechen zu können, habe ich den Begriff des elliptischen Gliedes aufgestellt. Ich nenne nämlich $a \cos xt + b \sin xt$, wo a und b beliebige Strecken, x eine beliebige Zahl und t die Zeit ist, ein elliptisches Glied mit dem Zeiger x. Es stellt nämlich dies Glied eine Strecke dar, die an einen festen Punkt Punkt gelegt, eine Ellipse in der Zeit $2\pi : x$ nach einem sehr einfachen Gesetz durchläuft.

Es ergeben sich dann folgende zwei Sätze:

„Wenn die Bewegung eines Vereins von Punkten durch lineare Differentialgleichungen dargestellt wird, so entsprechen bei der mittleren Bewegung den elliptischen Gliedern, welche in dem Ausdruck der Kraft vorkommen, elliptische Glieder von denselben Zeigern in allen Strecken, welche von einem festen Punkt nach den beweglichen Punkten gezogen sind, und zwar sind die Koefficienten dieser Glieder durch die gegebenen Gleichungen vollkommen bestimmt."

Für die Theorie der Ebbe und Flut lautet der Satz:

„Die Bewegung, welche jeder Punkt des Meeres bei der Ebbe und Flut vollendet, ergiebt sich in erster Annäherung als Interferenz von vier elliptischen Bewegungen, von denen zwei dieselbe Umlaufszeit haben, wie die scheinbare Umlaufszeit der Sonne und des Mondes beträgt und die zwei anderen eine halb so grosse Umlaufszeit."

Stettin. **H. Grassmann.**

Aus dem Nachlass.

III.

Drehungen um einen Punkt.

(Neubearbeitet 1877.)

§ 1. Wenn a, b, c Strecken von der Länge Eins sind, α eine Zahl, so drückt a^α die Drehung um die Axe a aus mit dem Winkel α, so dass also, wenn

$$xa^\alpha = x_1$$

ist, x_1 die Strecke bedeutet, welche mit a denselben Winkel bildet wie die Strecke x und durch Drehung um a mit dem Drehungswinkel α hervorgeht; das Zeichen sei dabei so gewählt, dass $[axx_1]$ positiv ist, wenn $\sin\alpha > 0$ ist.

§ 2. Die Winkelgrösse $\sphericalangle bc$ wird einer andern solchen $\sphericalangle de$ dann und nur dann gleichgesetzt, wenn b, c, d, e in einer Ebene liegen und $\sphericalangle bc$ mit $\sphericalangle de$ der absoluten Grösse und dem Zeichen nach gleich ist, und es bedeutet

$$x \cdot \sphericalangle bc$$

die Strecke x_1 in welche die Strecke x übergeht, wenn das feste System dem x angehört, um eine zur Ebene bc senkrechte Axe sich so dreht, dass b in c übergeht. Unmittelbar hieraus folgen die Gleichungen

§ 3. $$aa^\alpha = a,$$

§ 4. $$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta,$$

§ 5. $$a^{2\pi} = 1,$$

§ 6. $$xa^\pi = -x \text{ wenn } x \perp a,$$

§ 7. $$xa^\pi = y,$$

wenn x und y gleichlang und der Winkel zwischen beiden doppelt so gross ist, wie zwischen x und a, also $\sphericalangle xa = \sphericalangle ay$, $\sphericalangle xy = \sphericalangle 2xa$ oder $y = x \cdot \sphericalangle 2xa$ (nach § 2) ist.

{Bei dem Produkte $xa^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots$ wird angenommen, dass man von links nach rechts operire, dass also auf die Strecke x zuerst die Drehung a^α, dann auf die so entstehende Strecke die Drehung b^β, $\cdots$

angewandt werde. Dabei seien bei der Drehung um a die Strecken $b, c, \cdots$, bei der um b die $c, \cdots$ jeweils im Raume fest.}*)

§ 8. **Hauptsatz.** Es ist

$$a^\pi b^\pi = \sphericalangle 2ab,$$

das heisst $a^\pi b^\pi$ stellt die Drehung um die Winkelgrösse $\sphericalangle 2ab$ dar.

Beweis: Es sei c senkrecht gegen a und b, so ist (nach § 6)

$$ca^\pi = -c,$$

also

$$ca^\pi b^\pi = -cb^\pi = c,$$

das heisst c ist die Drehaxe. Ferner ist (nach § 3) $aa^\pi = a$, also (nach § 7)

$$aa^\pi b^\pi = ab^\pi = a \cdot \sphericalangle 2ab,$$

das heisst a geht in die um den Winkel $2ab$ abweichende Grösse über.

§ 9. **Zusatz.** Ist c senkrecht gegen a und b und α der Winkel von a zu b, so ist

$$a^\pi b^\pi = c^{2\alpha}.$$

§ 10. **Hauptsatz für die Zusammensetzung der Drehungen.**

$$\sphericalangle 2ab \cdot \sphericalangle 2bc = \sphericalangle 2ac.$$

Beweis. Es ist (nach § 8)

$$\sphericalangle 2ab = a^\pi b^\pi,$$

also

$$\sphericalangle 2ab \cdot \sphericalangle 2bc = a^\pi b^\pi \cdot b^\pi c^\pi = a^\pi b^{2\pi} c^\pi$$

(nach § 4), oder (nach § 5 und 8)

$$= a^\pi c^\pi = \sphericalangle 2ac.$$

§ 11. Wenn x gegen a senkrecht ist, so ist

$$xa^\alpha = x \cos \alpha + \mid [ax] \sin \alpha.$$

Beweis. Denn es sei $xa^\alpha = y$, so sollte $[axy]$ positiv sein, wenn $\sin \alpha$ positiv ist. {Dies ist der Fall, denn die Formel giebt

$$[axy] = [ax \mid ax] \sin \alpha,$$

was mit $\sin \alpha$ gleiches Zeichen hat}. Ist nun $x = \lambda c$, wo λ eine Zahl ist und c die Länge Eins hat, so ist $xa^\alpha = \lambda c^\alpha$. Aber ca^α drückt die Drehung in der gegen a senkrechten Ebene aus; es sei c_1 senkrecht gegen a und c, mit beiden gleichlang und so gewählt, dass es durch eine positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ aus c hervorgeht, so ist, wenn $[acc_1] = 1$ gesetzt wird,

$$ca^\alpha = c \cos \alpha + c_1 \sin \alpha.$$

---

*) A. d. H.

Aber es ist $c_1 = | [ac]$, daher

$$ca^\alpha = c \cos\alpha + | [ac] \sin\alpha.$$

Dies mit λ multiplicirt giebt die obige Gleichung.

§ 12. Allgemein hat man, wenn x beliebig gegen a liegt,

$$xa^\alpha = [a \mid x] a (1 - \cos\alpha) + x \cos\alpha + | [ax] \sin\alpha.$$

Diese Gleichung giebt die Zurückführung der Drehung auf die Summe von Strecken.

Beweis. Es ist stets

$$x = [a \mid x] a + (x - [a \mid x] a).$$

Hier ist der zweite Theil senkrecht gegen a, weil sein inneres Produkt mit a gleich Null ist, also erhält man (nach § 3 und § 11)

$$xa^\alpha = [a \mid x] a + (x - [a \mid x] a) \cos\alpha + | [ax] \sin\alpha,$$

was zu beweisen war.

§ 13. Es ist

$$x \frac{\partial}{\partial\alpha} a^\alpha = | [a \cdot xa^\alpha].$$

Beweis. Die linke Seite ist (nach § 12)

$$\frac{xa^{\alpha + d\alpha} - ax^\alpha}{d\alpha} = [a \mid x] a \sin\alpha - x \sin\alpha + | [ax] \cos\alpha = | [a \cdot xa^\alpha].$$

§ 14. Die Formel

$$x \frac{\partial}{\partial a} a^\alpha da = ([a \mid x] da + [da \mid x] a)(1 - \cos\alpha) + | [da \cdot x] \sin\alpha$$

folgt unmittelbar, wenn man (12) nach a differenziirt. Wenn a sich um da ändert, so muss da senkrecht gegen a sein, weil $a + da$ die Länge Eins haben soll, also $(a + da)^2 = a^2$, $[a \mid da] = 0$ sein muss.

§ 15. Man kann setzen

$$x \frac{\partial}{\partial a} a^\alpha da = | [qy],$$

wo

$$q = | [ada] - (| [ada]) a^\alpha$$

die instantane Drehaxe und $y = xa^\alpha$ ist.

Beweis. Es seien e_1, e_2, e_3 drei aufeinander senkrechte Strecken von der Länge Eins {so dass $| [e_1 e_2] = e_3$ ist} und es werde

$$e_1 a^\alpha = a_1, \quad e_2 a^\alpha = a_2, \quad e_3 a^\alpha = a_3,$$

$$q = q_1 a_1 + q_2 a_2 + q_3 a_3$$

gesetzt, so muss sein, wenn das partielle Differential nach a durch d angedeutet wird, {falls der Ansatz $dy = | [qy]$ richtig ist}

$$da_1 = | [qa_1], \quad da_2 = | [qa_2], \quad da_3 = | [qa_3].$$

Also

$$[a_1 a_2 d a_2] = [a_1 a_2 \mid q a_2] = [a_1 a_2 \mid (q_1 a_1 a_2 + q_3 a_3 a_2)].$$

Da aber

$$[a_1 a_2 \mid a_3 a_2] = 0, \quad [a_1 a_2 \mid a_1 a_2] = 1$$

ist, so folgt

$$[a_1 a_2 d a_2] = q_1.$$

Ebenso wird

$$[a_2 a_3 d a_3] = q_2,$$
$$[a_3 a_1 d a_1] = q_3,$$

{Dagegen wird

$$[a_2 a_3 d a_2] = -q_3, \quad [a_3 a_1 d a_2] = 0.\}$$

Um nun diese Ausdrücke möglichst einfach zu gestalten, wählen wir $e_1 = a$, e_2 parallel mit da, nämlich $da = \gamma e_2$, wo γ eine Zahl. Dann wird (nach § 11)

$$a_1 = e_1,$$
$$a_2 = e_2 \cos\alpha + e_3 \sin\alpha,$$
$$a_3 = e_3 \cos\alpha - e_2 \sin\alpha.$$

Ferner (nach § 14)

$$\frac{1}{\gamma}\, d a_1 = \frac{1}{\gamma}\, e_1 \cdot d a^\alpha = e_2 (1 - \cos\alpha) - e_3 \sin\alpha,$$
$$\frac{1}{\gamma}\, d a_2 = e_1 (1 - \cos\alpha),$$
$$\frac{1}{\gamma}\, d a_3 = e_1 \sin\alpha.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\gamma}\, q_1 = [e_1 \cdot (e_2 \cos\alpha + e_3 \sin\alpha) \cdot e_1 (1 - \cos\alpha)] = 0,$$
$$\frac{1}{\gamma}\, q_2 = [e_2\, e_3\, e_1 \sin\alpha] = \sin\alpha,$$
$$\frac{1}{\gamma}\, q_3 = [e_3\, e_2\, e_1 (1 - \cos\alpha)] = \cos\alpha - 1;$$

also

$$\frac{1}{\gamma}\, q = a_2 \sin\alpha + a_3 (\cos\alpha - 1) = e_3 - e_3 a^\alpha = \mid [e_1 e_2] - (\mid [e_1 e_2])\, a^\alpha,$$
$$q = \mid [e_1 \cdot \gamma e_2] - (\mid [e_1 \cdot \gamma e_2])\, a^\alpha = \mid [a d a] - (\mid [a d a])\, a^\alpha.^{*)}$$

---

*) Um die Richtigkeit zu bestätigen berechne man mit

$$q = (1 - \cos\alpha) \mid [a d a] + \sin\alpha \cdot d a$$

$$\mid [q y] = (1 - \cos\alpha)^2 [a \mid x]\, [a d a \mid a] + \cos\alpha\, (1 - \cos\alpha)\, [a d a \mid x]$$
$$- \sin\alpha\, (1 - \cos\alpha)\, [a \mid x] \mid [a d a] - \sin\alpha \cos\alpha\, [\mid x \cdot \mid d a]$$
$$+ (1 - \cos\alpha) \sin\alpha\, [a d a \cdot a x] + \sin^2\alpha\, [\mid d a \cdot a x].$$

Aber nach $\mathfrak{A}_2$ Nr. 180 und 181 folgt, weil $[a \mid d a] = 0$,

§ 16. Wenn

$$xa^{\alpha} = y$$

und

$$q = ada + | [ada] - (| [ada]) a^{\alpha}$$

ist, so ist

$$dy = | [qy].$$

Dieser Satz fasst (§ 13) und (§ 15) zusammen; q heisst die instantane Drehung.

Anm. Es ist a^{α} nur definirt sofern a die Länge Eins hat. Dagegen wird $(na)^{\alpha}$ noch zu definiren sein. Die Definition muss so sein, dass sie für die Ebene stimmt. Dann empfiehlt sich unter a^{α} die Drehung um den Winkel $\alpha \frac{\pi}{2}$ zu verstehen. In diesem Falle wird a nur eine Vertretung von $i = \sqrt{-1}$ und es wird dann $(ni)^{\alpha} = n^{\alpha} i^{\alpha}$, also allgemein $n^{\alpha} a^{\alpha}$. Doch wegen des Differentiales wird man bei der alten Auffassung bleiben und a in a^{α} als eine Vertretung des

$$\varepsilon = \cos 1 + i \sin 1 = e^{i}$$

setzen können. Ja es wäre zweckmässig ε statt α als Symbol einzuführen und die verschiedenen Axen durch Indices zu unterscheiden.

§ 17. Wenn A ein Linientheil von der Länge Eins, x ein Punkt, α ein Winkel ist, so bedeutet

$$xA^{\alpha}$$

die Drehung um die Axe A mit dem Winkel α, so dass also, wenn

$$xA^{\alpha} = x_1$$

ist, x_1 den Punkt bedeutet, der aus x hervorgeht, wenn das starre System (x, A) um A sich dreht und dabei den Winkel α beschreibt.

§ 18. Wenn α unendlich klein ist, so ist

$$xA^{\alpha} = x + \alpha \, | \, [xA],$$

wo $| \, [xA]$ die Strecke bedeutet, welche die Ergänzung des Ausdehnungswerthes von $[xA]$ ist.*)

§ 19. Wenn α unendlich klein ist und p eine Strecke, so ist

$$pA^{\alpha} = p + \alpha \, | \, [pA].$$

$$[ada \mid x] = [a \mid x] da - [x \mid da] a, \quad [ada \mid a] = [a \mid a] da = da,$$
$$[ax \mid da] = -[x \mid da] a,$$
$$[a \mid a][da \cdot x] - [a \mid x][da \cdot a] = [a \cdot da \cdot x \mid a] = [a \cdot da \cdot x] \mid a.$$

Nimmt man in der letzten Formel die Ergänzungen, so kommt

$$[ada \cdot ax] = a[a \cdot da \cdot x] = [a \mid a] \mid [da \cdot x] - [a \mid x] \mid [da \cdot a].$$

Setzt man diese Werthe ein und reducirt, so ergiebt sich die Formel im Beginn der Nr. 15. (A. d. H.)

*) Ist $A = ab$, wo a und b Punkte, so soll $| [xA] = | [(a - x)(b - x)]$ sein. (A. d. H.)

Beweis. Sei $p = x - y$, wo x und y einfache Punkte, so ist

$$\begin{aligned} pA^{\alpha} &= (x - y) A^{\alpha} \\ &= x + \alpha \mid [xA] - y - \alpha \mid [yA] \\ &= x - y + \alpha \mid [(x - y) A]. \end{aligned}$$

§ 20. Wenn α und β unendlich klein sind, so ist

$$\begin{aligned} xA^{\alpha}B^{\beta} &= x + \alpha \mid [xA] + \beta \mid [xB] \\ &= x + \mid [xS], \end{aligned}$$

wenn man

$$S = \alpha A + \beta B$$

setzt.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} xA^{\alpha}B^{\beta} &= (x + \alpha \mid [xA]) B^{\beta} = xB^{\beta} + \alpha(\mid [xA]) B^{\beta} \\ &= x + \beta \mid [xB] + \alpha \mid [xA] + \alpha\beta \mid [\mid [xA] \cdot B], \end{aligned}$$

wo das letzte Glied von höherer Ordnung ist, also wegfällt.

§ 21. Wenn x in $x + \mid [xS]$ übergeht, so nennen wir S das **Verschiebungssystem** und $\mid [xS]$ die **Verschiebung** des Punktes x.

§ 22. Bei unendlich kleinen Axendrehungen summiren sich (nach § 20), die Verschiebungssysteme und jede unendlich kleine Bewegung lässt sich als Verschiebung darstellen, also aus unendlich kleinen Rotationen um zwei Axen zusammensetzen.

§ 23. Jede Linie, die mit dem Verschiebungssystem äusserlich multiplicirt Null giebt, verschiebt sich senkrecht zu sich selbst.

Beweis. Es sei xy die Linie, also $[xyS] = 0$; dann ist $\mid [xS]$ die Verschiebung von x; aber dann ist $y - x$ auf dieser Verschiebung senkrecht. Denn es ist

$$[(y - x) \mid \mid [xS]] = [(y - x) xS] = [yxS] = 0.^{*})$$

§ 24. Die Verschiebung der Linie xp, wo x ein Punkt und p eine Strecke, in ihrer eigenen Richtung, ist

$$\frac{1}{p^2} [pxS] \cdot p,$$

oder wenn p die Länge Eins hat,

$$= [pxS] \cdot p.$$

---

*) Hier ist $\mid\mid [xS]$ nicht $= [xS]$, sondern, wenn $S = \alpha ab + \beta a_1 b_1$ ist, ist $\| [xS] = \alpha[(a - x)(b - x)] + \beta[(a_1 - x)(b_1 - x)]$. Weil aber bei dem Produkte $[y - x) \| xS]$ die Rechnung mit Strecken angewandt wird ($\mathfrak{A}_2$ § 330 ff.), ist $[(y - x)(a - x)(b - x)]$ eine Zahl und zwar $= [yxab]$, wenn hiebei die Punktrechnung benutzt wird. Aehnlich ist $[(y - x)(a_1 - x)(b_1 - x)] = [yxa_1 b_1]$ und daher

$$[(y - x) \| [xS]] = \alpha [yxab] + \beta [yxa_1 b_1] = [yxS].$$

Beweis. Es sei $| [xS] = \alpha p + q$, wo α eine Zahl und $[p \mid q] = 0$ ist. Also p vorgefügt, das heisst p mit der Ergänzung multiplicirt,

$$[p \,||\, [xS]] = \alpha p^2,$$

woraus die obigen Resultate folgen.

IV.

Bewegung eines auf einer festen Fläche gleitenden festen Körpers.

§ 1. Wenn die Strecke x aus den drei Gleichungen*)

$$[x \mid a] = \alpha, \quad [x \mid b] = \beta, \quad [x \mid c] = \gamma,$$

in welchen a, b, c Strecken, α, β, γ Zahlen bezeichnen, zu bestimmen ist, so kann man setzen

$$x = \lambda \mid [bc] + \mu \mid [ca] + \nu \mid [ab],$$

unter λ, μ, ν Zahlen verstanden. Dann ergiebt sich

$$\alpha = \lambda [abc], \quad \beta = \mu [abc], \quad \gamma = \nu [abc],$$

sodass

$$x = \frac{\alpha \mid [bc] + \beta \mid [ca] + \gamma \mid [ab]}{[abc]}$$

wird, wenn $[abc] \neq 0$ ist.

§ 2. Drei Punkte x, y, z seien fest verbunden und ihre virtuellen Verrückungen $\delta x, \delta y, \delta z$ an drei Gleichungen

$$[p \mid \delta x] = 0, \quad [q \mid \delta y] = 0, \quad [r \mid \delta z] = 0$$

geknüpft, wie sie sich ergeben würden, wenn die drei Punkte auf gegebene Flächen gebannt wären. Wegen der festen Verbindung ist $(z - x)^2$ und $(z - y)^2$ constant, daher

$$[(z - x) \mid (\delta z - \delta x)] = 0, \quad [(z - y) \mid (\delta z - \delta y)] = 0.$$

Es muss also, wenn

$$y - z = x', \quad z - x = y', \quad x - y = z'$$

gesetzt werden, δz die Gleichungen erfüllen

$$[r \mid \delta z] = 0, \quad [y' \mid \delta z] = [y' \mid \delta x], \quad [x' \mid \delta z] = [x' \mid \delta y].$$

Nach dem in § 1 gefundenen Resultat ergiebt sich folglich

$$\delta z = \frac{1}{[ry'x']} \{[y' \mid \delta x] \mid [x'r] + [x' \mid \delta y] \mid [ry']\}.$$

Um δy zu bestimmen hat man die Gleichungen

$$[q \mid \delta y] = 0, \quad [z' \mid \delta y] = [z' \mid \delta x].$$

*) Der gesammte Text ist vom Herausgeber; im MS. ist die Folge der Formeln eine andere.

Nimmt man dazu noch die Gleichung

$$[c \mid \delta y] = \delta v,$$

wo die Strecke c und die Zahl δv ganz willkürlich sind, so folgt

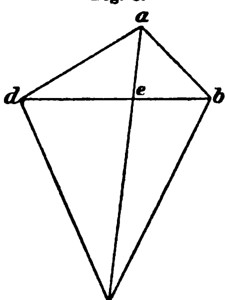
$$\delta y = \frac{1}{[qz'c]} \{[z' \mid \delta x] \mid [cq] + \delta v \mid [qz']\}.^{*})$$

V.

Einige Schwerpunktsbestimmungen.

§ 1. Der Schwerpunkt s des ebenen Vierecks $abcd$ (Fig. 8) ergiebt sich, wenn man die Diagonale ac zieht, durch die Formel

Fig. 8.



$$3sV = (a + b + c)(abc) + (a + c + d)(cda),$$

{wo (abc), (cda), V die Inhalte der Dreiecke abc, cda und des Vierecks bezeichnen. Die rechte Seite ist}

$$= (a + b + c + d)V - [d(abc) + b(cda)].$$

Die letzte Summe stellt einen vielfachen Punkt vor, der in bd, also {der Symmetrie wegen} auch in ac, also in dem Durchschnittspunkt beider liegt und $= eV$ ist. Somit findet sich

$$3sV = (a + b + c + d - e)V,$$

$$3s = a + b + c + d - e.$$

§ 2. Anderer Beweis. Es ist

$$3sV = (a + b + e)(abe) + (b + c + e)(bce) + (c + d + e)(cde) + (d + a + e)(dea)$$

$$= a(dab) + b(adc) + c(bcd) + d(cda) + eV$$

und so weiter. Giebt eine Reihe von Beziehungen**).

§ 3. Der Schwerpunkt einer sphärischen Figur {vom Inhalte} φ liegt auf dem Endpunkt einer Strecke r, die auf der geometrischen Summe F dieser Figur senkrecht steht und sich zum Radius ϱ der Kugel verhält wie jene Summe zum Inhalt jener Figur, das heisst

$$r : \varrho = F : \varphi$$

oder genauer

$$\varphi r = \mid \varrho F = \varrho \mid F.$$

---

*) δx bleibt willkürlich; die virtuellen Verschiebungen eines vierten mit x, y, z fest verbundenen Punktes könnte man nun leicht finden. Die Bewegungsgleichungen des MS. werden hier nicht abgedruckt, weil sie nicht richtig sind. (A. d. H.)

**) Im MS. ist dies nicht weiter ausgeführt. (A. d. H.)

Beweis. Dies gilt 1) wenn die sphärische Figur unendlich klein; denn dann ist dem numerischen Werth nach $\varphi = F$, $r = \varrho$ und der Richtung nach r senkrecht auf F.

2) Hat man nun mehrere solche Elemente der Kugel, die durch die Indices $1, 2, \cdots$ markirt sind, {sind $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ die Inhalte, $r_1, r_2, \cdots$ die Träger der Schwerpunkte, $F_1, F_2, \cdots$ die Flächenelemente nach Grösse und Richtung} und ist

$$\varphi = \Sigma\varphi_\lambda, \quad F = \Sigma F_\lambda,$$

r der Träger des Schwerpunktes, so ist

$$\varphi_1 r_1 = | \varrho F_1,$$
$$\varphi_2 r_2 = | \varrho F_2.$$
$$\cdots\cdots$$

Aber

$$\varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \cdots = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots) r = \varphi r,$$

somit

$$\varphi r = | \varrho (F_1 + F_2 + \cdots) = | \varrho F. \quad \text{q. e. d.}$$

VI.

Darstellung der Statik nach Lagrange.*)

§ 1. Wenn $P_1, P_2, \cdots$ die als Strecken gedachten Kräfte und $p_1, p_2, \cdots$ ihre Angriffspunkte, $\delta p_1, \delta p_2, \cdots$ die unendlich kleinen Wege sind, welche die Angriffspunkte vermöge einer Bewegung des Vereins durchlaufen, so ist die Gleichung des Gleichgewichts

$$\Sigma[P_k \mid \delta P_k] = 0.$$

§ 2. **Gleichgewicht von Kräften, die an einem Punktsystem wirken, das sich um eine Axe frei drehen kann.**

Es sei C die Drehungsaxe {von der Länge Eins}, ein Punkt in ihr, g, sei der Ursprung der Träger, also $p_k - g$ die Träger, s_k die senkrechte Projection dieses Trägers auf die Drehungsaxe und q_k die auf die Drehungsebene {das heisst eine zu C senkrechte Ebene}, also

$$p_k - g = s_k + q_k.$$

Es sei**)

$$q_k = r_k \varepsilon^{\varphi + \sigma_k},$$

wo $\varepsilon = e^i$, und zwar $\sigma_0 = 0$, also $q_0 = r_0 \varepsilon^\varphi$. Nun habe der Verein die Freiheit sich um diese Axe zu drehen, so müssen die Bedingungs-

*) Aus dem MS., das diesen Titel führt, wird hier nur abgedruckt, was nicht schon anderweitig sich findet. Für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten vgl. Seite 59. (A. d. H.)

**) Vgl. hierzu Seite 75 ff.

gleichungen von φ unabhängig sein, also $\delta\varphi$ selbst willkürlich, sein Gesammtkoefficient in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts Null sein. Nun ist, wenn nur φ als veränderlich betrachtet wird,

$$\delta p_k = q_k \delta\varphi,$$

wo $\delta\varphi$ die Richtung um 90° in der Schwenkungsebene ändert; also hat man

$$\Sigma[P_k \mid q_k \delta\varphi] = 0.$$

Nun sei $\bar{P}_k$ die Projection von P_k auf die Schwenkungsebene, so hat man

$$\Sigma[\bar{P}_k \mid q_k \delta\varphi] = 0^{*}),$$

oder da die inneren Produkte innerhalb derselben Ebene proportional sind den äusseren, deren zweite Faktoren senkrecht sind gegen die des inneren Produkts und ihnen gleich, so hat man

$$\Sigma[\bar{P}_k q_k] = 0.$$

Diese Gleichung findet aber dann und nur dann statt, wenn zugleich das Produkt mit der Drehungsaxe Null ist; dann können wir aber statt der Projectionen die Grössen selbst setzen und schliesslich p_k statt $p_k - g$, also

$$\Sigma[p_k P_k C] = 0,$$

oder

$$\Sigma[\Pi_k C] = [C \Sigma \Pi_k] = 0,$$

wenn $\Pi_k = p_k P_k$ die Kraft als Liniengrösse bezeichnet. Hiebei ist noch zu bemerken, dass, wenn wir innere Kräfte des Vereins solche nennen, welche zwischen zwei Punkten des Vereins in ihrer Verbindungslinie wirken und einander entgegengesetzt gleich sind, alle anderen äussere, sich in dieser Gleichung die inneren Kräfte aufheben.

§ 3. Gleichgewicht eines Vereins von Punkten, die an einem linearen Systeme haften und von denen je zwei aufeinanderfolgende constante Entfernungen haben.

Die Punkte seien $p_0, p_1, \cdots p_{n+1}$. Die Bedingung der constanten Entfernung giebt

$$(p_{k+1} - p_k)^2 = f_k^2,$$

wo f_k gegeben ist (von $k = 0$ an bis $k = n$). Dies giebt differentiirt

$$[(p_{k+1} - p_k) \mid (\delta p_{k+1} - \delta p_k] = 0.$$

Somit hat man als Gleichung des Gleichgewichts

$$\Sigma([P_k \mid \delta p_k] + \lambda_k [(p_{k+1} - p_k) \mid (\delta p_{k+1} - \delta p_k)]) = 0,$$

---

*) $\mid q_k \delta\varphi$ ist eine durch die Axe C gehende Fläche, die $= [q_k C] \delta\varphi$ gesetzt werden kann, deren Produkt mit einer zu C parallelen Strecke verschwindet. Daher ist

$$[P_k \mid q_k \delta\varphi] = [P_k q_k C] \delta\varphi = [P_k (p_k - g - z_k) C] \delta\varphi = [P_k p_k C] \delta\varphi.$$

oder, alles auf δp_k gebracht, wenn man bemerkt, dass λ_k nur zwischen $k = 0$ und $k = n$ geltenden Werth hat,

$$\Sigma[(P_k + \lambda_{k-1}(p_k - p_{k-1}) - \lambda_k(p_{k+1} - p_k)) \mid \delta p_k] = 0.$$

Dies liefert die $n + 2$ Gleichungen

$$P_k + \lambda_{k-1}(p_k - p_{k-1}) - \lambda_k(p_{k+1} - p_k) = 0.$$

Summirt man bis zum Zeiger m, so folgt

$$\sum_{k=0}^{m} P_k - \lambda_m(p_{m+1} - p_0) = 0$$

und durch Multiplikation

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{m} P_k\right)(p_{m+1} - p_0)\right] = 0.$$

§ 4. Gleichgewicht von Punkten, deren Entfernungen durchaus constant sind.

Es seien drei Punkte angenommen p_1, p_2, p_3 mit den Bedingungen

$$(p_2 - p_3)^2 = f^2, \quad (p_3 - p_1)^2 = g^2, \quad (p_1 - p_2)^2 = h^2,$$

so hat man

$$[P_1 \mid \delta p_1] + [P_2 \mid \delta p_2] + [P_3 \mid \delta p_3] + \lambda[(p_2 - p_3) \mid (\delta p_2 - \delta p_3)]$$
$$+ \mu[(p_3 - p_1) \mid (\delta p_3 - \delta p_1)] + \nu[(p_1 - p_2) \mid (\delta p_1 - \delta p_2)] = 0.$$

Also

$$P_1 = -\nu(p_1 - p_2) + \mu(p_3 - p_1) = 0,$$
$$P_2 = -\lambda(p_2 - p_3) + \nu(p_1 - p_2) = 0,$$
$$P_3 = -\mu(p_3 - p_1) + \lambda(p_2 - p_3) = 0.$$

Durch Multiplikation mit bezw. p_1, p_2, p_3 erhält man

$$[P_1 p_1] = -\nu[p_1 p_2] + \mu[p_3 p_1],$$
$$[P_2 p_2] = -\lambda[p_2 p_3] + \nu[p_1 p_2],$$
$$[P_3 p_3] = -\mu[p_3 p_1] + \lambda[p_2 p_3],$$

also durch Addition

$$[P_1 p_1] + [P_2 p_2] + [P_3 p_3] = 0$$

{welche Gleichung einen bekannten Satz ausspricht}.

§ 5. Gleichgewicht eines biegsamen unausdehnbaren Fadens.

Der veränderliche Punkt p stelle jeden Punkt des Fadens, dm die Masse eines unendlich kleinen Theilchens dar. Die Unausdehnbarkeit des Fadens giebt dp^2 constant, also

$$[dp \mid \delta dp] = 0$$

und man hat

$$\int [P \mid \delta p]\, dm + \int \lambda [dp \mid \delta dp] = 0$$

{wobei P die auf die Masseneinheit wirkende Kraft ist}. Nun ist aber

$$\int \lambda[dp \mid \delta dp] = \int \lambda[dp \mid d\delta p] = \{\lambda[dp \mid \delta p]\}_{p_1}^{p_2} - \int [d(\lambda dp) \mid \delta p]$$

{wo $\{\ \}_{p_1}^{p_2}$ die Differenz der für die Endpunkte p_2 und p_1 geltenden Werthe vorstellt}. Somit ist die Gleichung des Gleichgewichts

$$\int [(Pdm - d(\lambda dp)) \mid \delta p] + \{[\lambda dp \mid \delta p\}_{p_1}^{p_2} = 0.$$

Dies giebt für alle inneren Punkte

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} Pdm = d(\lambda dp), \\ \lambda dp = D + \int Pdm, \end{cases}$$

wo D eine willkürliche, constante Strecke ist. Daraus folgt weiter

$$\text{(b)} \qquad [(D + \int Pdm) dp] = 0.$$

Soll der Faden auf einer Oberfläche sich bewegen, deren Differentialgleichung

$$[q \mid dp] = 0$$

ist, so kommt noch hinzu in (a) μq, sodass

$$\text{(c)} \qquad Pdm - d(\lambda dp) + \mu q = 0$$

oder

$$[q(Pdm - d(\lambda dp))] = 0$$

ist. μq ist der Druck senkrecht gegen die Oberfläche.

Sind nur an den Enden Gewichte angebracht, also $P = 0$, so folgt aus (c), {weil $[dp \mid q] = 0$ sein muss},

$$[dp \mid d(\lambda dp)] = 0,$$

$$d\lambda dp^2 + \lambda[dp \mid d^2p] = 0.$$

Da dp^2 constant ist, so ist also auch $d\lambda = 0$, λ constant, das heisst die Spannung. Ferner hat man an den Grenzen

$$P'' + \lambda dp'' + \mu'' q'' = 0,$$

$$P' - \lambda dp' + \mu' q' = 0.$$

Mit dp'' und dp' multiplicirt, erhält man

$$[P'' \mid dp''] = -\lambda dp''^2, \quad [P' \mid dp'] = \lambda dp'^2.$$

Ferner ist {in jedem Punkt des Fadens nach (c)}

$$\mu q = \lambda d^2 p.$$

Der Krümmungshalbmesser ist aber in diesem Falle

$$\varrho = \frac{dp^2}{d^2p}.\text{*)}$$

*) Im Nenner ist die Länge von d^2p zu nehmen. In einer Erörterung über das Gleichgewicht eines elastischen Fadens nach Lagrange, Méc. Anal. (Bd. II Seite 162 der Gesammtausgabe) findet sich die folgende Ableitung der Formel für ϱ.

§ 6. **Gleichgewicht eines festen Körpers, dessen Theile alle von Kräften gezogen werden.**

Am leichtesten gelangt man zu dem gewünschten Resultate von dem Satze aus, dass jede Veränderung in der Lage eines sich congruent bleibenden Systems, wenn ein Punkt p_0 fest ist, sich durch eine Schwenkung, also die unendlich kleine Aenderung sich in der Form

$$\delta(p - p_0) = |\,[(p - p_0)\,\delta x],$$

wenn δx eine unendliche kleine Strecke der Drehungsaxe ist, ausdrücken lässt. {Dies ist

$$= [\,|\,(p - p_0) \cdot |\,\delta x];$$

es ist aber $|\,\delta x = \delta M$}, wo M eine constante Fläche ist, die der Drehungsebene angehört. {Also ist

$$\delta p = \delta p_0 + [\,|\,(p - p_0) \cdot \delta M],$$
$$|\,\delta p = |\,\delta p_0 + [(p - p_0)\,|\,\delta M].$$

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten giebt dann

$$\Sigma[P\,|\,\delta p_0] + \Sigma[P(p - p_0)\,|\,\delta M] = 0.\}$$

Da δp_0 und δM constant sind in Bezug auf die Summe, so kann man diese Gleichung auch

$$[\Sigma P\,|\,\delta p_0] + [(\Sigma P(p - p_0))\,|\,\delta M] = 0$$

schreiben.

Ist der Körper frei, so hat man, {weil δp_0 und δM willkürlich}

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma[P(p - p_0)] = \Sigma[Pp] = 0.$$

Ist a ein fester Punkt des Körpers, so hat man $\delta a = 0$, also

---

Seien $p, p + dp, p + dp + d^2p$ drei unendlich benachbarte Punkte A, B, C einer Raumcurve, so ist der unendlich kleine Winkel e, den AB mit BC macht, gegeben durch

$$AB \cdot BC \sin e = [dp(dp + d^2p)] = [dp \cdot d^2p],$$

{genauer durch den Zahlenwerth der rechten Seite}. Sind also AB und BC gleich lang, so wird

$$e = \frac{[dp \cdot d^2p]}{dp^2}.$$

Aus $AB = BC$ folgt aber $[dp\,|\,d^2p] = 0$, dp und d^2p sind also senkrecht zu einander {und es wird der Zahlenwerth von $[dp \cdot d^2p]$ gleich dem Produkt der Längen der beiden Strecken}, sodass

$$e^2 = \frac{(d^2p)^2}{dp^2}$$

folgt. Ist ϱ der Krümmungsrabius, so ist $\varrho^2 e^2 = dp^2$, daher

$$\varrho = \frac{dp^2}{d^2p}.$$

$$0 = \delta a = | \delta p_0 + [(a - p_0) | \delta M],$$
$$| \delta p_0 = [(p_0 - a) | \delta M],$$
$$| \delta p = [(p - a) | \delta M].$$

Dies in die Grundgleichung substituirt giebt

$$\Sigma[P | \delta p] = [\Sigma[P(p - a)] | \delta M] = 0$$

{also weil δM willkürlich}

$$\Sigma[P(p - a)] = 0$$

und durch Multiplikation mit a

$$\Sigma[Ppa] = 0.$$

Sind zwei Punkte fest a und b, so hat man noch

$$[(a - b) | \delta M] = 0.$$

Dies giebt $a - b$ senkrecht gegen δM und die obige Formel giebt $\Sigma[P(p - a)]$ senkrecht gegen δM, also beide parallel, das heisst

$$\Sigma[P(p - a)(b - a)] = 0$$

und durch Multiplikation mit a

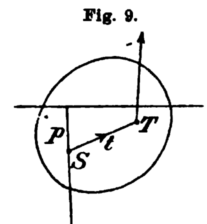
$$\Sigma[Ppab] = 0.$$

VII.

Statisches Schwimmen.

§ 1. Es sei S (Fig. 9) der Schwerpunkt des Körpers, T (Tragepunkt) der des verdrängten Wassers. Ferner sei ST mit t bezeichnet und p sei eine Strecke senkrecht auf der Schwimmfläche in der Richtung von der Schwimmfläche nach dem Wasser zu. So ist Gleichgewicht, wenn $[pt] = 0$; sonst dreht sich der Körper von p nach t zu. Ist G das Gewicht des Körpers, so ist das Drehmoment

Fig. 9.



$$= \frac{G}{p} [pt],$$

{wo das p im Nenner die Länge der Strecke p bezeichnen soll}.

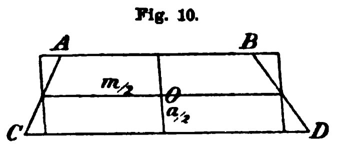
§ 2. Das Gleichgewicht ist sicher, wenn bei sehr kleiner Drehung, durch die t in t' übergeht, $[pt']$ diese Drehung wieder zu verkleinern strebt.

§ 3. Es sei ein horizontales Rechtspat {Prisma} betrachtet, dessen eine Kante horizontal liegt und dessen vertikaler {auf den Kanten senkrechter} Durchschnitt die Ebene der Zeichnung bildet, so ist klar, dass, wenn das specifische Gewicht $s > \frac{1}{2}$ ist, dieselben Erscheinungen



eintreten, als wenn s um ebensoviel $< \frac{1}{2}$ ist {nur dass in diesem Fall eingetaucht ist, was im andern Fall frei war und umgekehrt}. Es kommt hier zunächst auf den Schwerpunkt eines Trapezes an. Dieser liegt in der geraden Linie, welche die parallelen Seiten halbirt. Die Mitte dieser geraden Linie sei O, die Strecke von O nach der Mitte der längeren Seite $\frac{1}{2}n$. Die Strecke von O (Fig. 10) nach der Mitte der einen nicht parallelen Seite AC sei $\frac{1}{2}m$. Das Parallelogramm mit den Seiten m und n und dem Mittelpunkt O werde konstruirt. Aus dem Parallelogramm wird das Trapez durch Zutritt zweier Dreiecke und den Wegfall zweier anderer. Ist die Strecke $m + x$ die grössere, $m - x$ die kleinere der Parallelseiten des Trapezes {nach Grösse und Richtung}, so verhält sich jedes dieser vier Dreiecke zum Parallelogramm wie $x : 8m$ {wo natürlich die Zeichen x und m die Längen dieser Strecken bedeuten}. Sind T_1, T_2, T_3, T_4 die Schwerpunkte jener Dreiecke, so ist der {Schwerpunkt T des Trapezes}

Fig. 10.



$$T = O + \frac{x}{8m}(T_1 + T_2 - T_3 - T_4).$$

Hier ist

$$T_1 = O + \frac{m}{2} + \frac{1}{3}(n + \tfrac{1}{2}x),$$

$$T_2 = O - \frac{m}{2} + \frac{1}{3}(n - \tfrac{1}{2}x),$$

$$T_3 = O - \frac{m}{2} - \frac{1}{3}(n - \tfrac{1}{2}x),$$

$$T_4 = O + \frac{m}{2} - \frac{1}{3}(n + \tfrac{1}{2}x)^*),$$

also

$$T_1 + T_2 - T_3 - T_4 = \frac{4n}{3}$$

und

$$T - O = \frac{xn}{6m}.$$

§ 4.**) Der vertikale Durchschnitt sei ein Rechteck, so sind Gleichgewichtslagen erstens die gerade und die Ecklage. Für die

---

*) In diesen vier Formeln ist x als Strecke so angenommen, dass der Eckpunkt C des Trapezes $O + \frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{x}{2}$ ist. (A. d. H.)

**) Grassmann untersucht im MS. zuerst das Quadrat und dann das Rechteck. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird hier nur die letztere Betrachtung (mit einigen gebotenen Abweichungen vom MS.) abgedruckt. (A. d. H.)

anderen Lagen ($s < \frac{1}{2}$ angenommen), ist zu untersuchen ob ein Dreieck oder ein Trapez eintaucht.

Im ersten Fall sei S (Fig. 11) der Mittelpunkt, C die eintauchende Ecke, die nach C hinstrebenden Seiten {seien die Strecken} a und b, die Seiten des eintauchenden Dreiecks die Strecken xa und yb, so wird die {Strecke AB der} Schwimmlinie

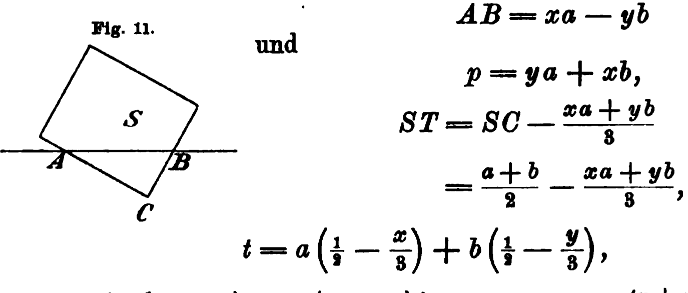


Fig. 11.

$$AB = xa - yb$$

und

$$p = ya + xb,$$

$$ST = SC - \frac{xa + yb}{3}$$

$$= \frac{a+b}{2} - \frac{xa+yb}{3},$$

$$t = a\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) + b\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3}\right),$$

$$[pt] = \left\{ y\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{3}\right) - x\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right)\right\}[ab] = (x-y)\left(\frac{x+y}{3} - \frac{1}{2}\right)[ab]^{*)}.$$

§ 5. Es tauche {vom Rechteck} ein Trapez ein mit der Seite a. Sei C (Fig. 12) die tiefe Ecke, DE die Linie, welche die Mitten der nicht parallelen Seiten verbindet, also der Inhalt des Trapezes $DE \,.\, a$, somit nach dem Archimedischen Princip $abs = DE \cdot a$

Fig. 12.

$$DE = bs.$$

Die Mitte von DE sei O, die Parallelseiten $b(s+\xi)$ und $b(s-\xi)$, so ist nach Nr. 3

$$T - O = \frac{\xi}{6s} n.$$

Aber die Strecke n, die die Mitte von von FA mit der von BC verbindet, ist

$$= a - \xi b,$$

$$SO = \frac{b}{2} - \frac{s}{2} b,$$

also

$$t = SO + OT = \frac{b}{2} - \frac{s}{2} b + \frac{\xi}{6s}(a - \xi b) = \frac{\xi}{6s} a + \left(\frac{1-s}{2} - \frac{\xi^2}{6s}\right) b.$$

Ferner wird die Strecke AB der Schwimmlinie

$$AB = a - 2\xi b,$$

*) In dieser Formel lässt Grassmann den Faktor $x - y$ fort; in Folge dessen ist die Diskussion unvollständig. Deswegen und weil die Resultate bekannt sind (siehe zum Beispiel Jullien, Probl. d. méc. rat. Bd. II. Seite 396 ff.) wird hier und im Folgenden das MS. nur bis zur Entwickelung von $[pt]$ abgedruckt. (A. d. H.)

folglich

$$p = 2\xi a + b$$

und

$$[pt] = \left\{2\xi\left(\frac{1-s}{2} - \frac{\xi^2}{6s}\right) - \frac{\xi}{6s}\right\}[ab].$$

VIII.

Bestimmung der Kraft zu einer gegebenen Bahn.

§ 1. **Aufgabe.** Wenn ein Körper auf ebener Bahn um ein gegebenes Kraftcentrum sich bewegt, die Kraft zu finden.

Es sei X der Körper, C das Kraftcentrum, A irgend ein Punkt, der als Anfangspunkt der Strecken genommen wird, sodass $X - A = x$, $C - A = c$ gesetzt wird, und sei der Radiusvector von C aus r, also $x = c + r$, so ist

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

die Kraft, von der vorausgesetzt wird, dass sie die Richtung r hat. Dann ist

$$d[r\,dr] = [r\,d^2 r] = 0,$$

also $\left[r\frac{dr}{dt}\right]$ constant. Sei

$$[r\,dr] = [r\,dx] = \alpha\,dt,$$

so folgt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\alpha^2 d^2 x}{[r\,dx]^2}.$$

{Aber $d^2 x$ ist der Pfeil des Bogens, dessen Sehne dx ist.} Daher ist die Kraft proportional dem Pfeil des Bogens dividirt durch das Quadrat des Flächenraums zwischen Bogen und Centrum.

Nun sei $f(x)$ die Gleichung der Bahn, so ist

$$f'(x)\,dx = 0, \quad f'(x)\,d^2 x + f''(x)\,dx^2 = 0,$$

{wo $f'(x)$, $f''(x)$ die Lückenausdrücke (vgl. $\mathfrak{A}_2$ Nr. 450, 451) und die Produkte wie in $\mathfrak{A}_2$ Nr. 353 ff. genommen sind.

Da ferner $d^2 x$ gleiche Richtung mit r hat, so können wir setzen $d^2 x = \lambda r$, wo λ eine Zahl; dann liefert die Gleichung

$$\lambda = -\frac{f''(x)\,dx^2}{f'(x)\,r},$$

$$d^2 x = -\frac{f''(x)\,dx^2}{f'(x)\,r}\cdot r,$$

also}

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha^2\frac{f''(x)\,dx^2}{f'(x)\,r}\cdot\frac{r}{[r\,dx]^2}.$$

Bestimmt man nun zum Lückenausdruck $f'(x)$ eine Strecke $(f'(x))$,

so dass für jede Strecke p

$$f'(x)p = [(f'(x))p]$$

ist*), so folgt aus $f'(x)dx = 0$, dass dx parallel $(f'(x))$ ist. {Man kann also, unter μ eine Zahl verstanden,

$$dx = \mu(f'(x))$$

setzen und findet damit}

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{f''(x)(f'(x))^2}{f'(x)r} \cdot \frac{r}{[r(f'(x))]^2}.$$

{Oder, weil

$$f'(x)r = -[r(f'x))]$$

ist},

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{f''(x)(f'(x))^2}{(f'(x)r)^3} \cdot r.$$

§ 2. Insbesondere ist für Ellipse und Hyperbel

$$[xb]^2 \pm [xa]^2 = [ab]^2,$$

wenn a und b grosse und kleine Halbaxe oder irgend zwei conjugirte Durchmesser sind und der Ausgangspunkt der x der Mittelpunkt ist**).

{Dann ist

$$f'(x) = 2[xb][lb] \pm 2[xa][la],$$

wo l das Zeichen der Lücke ist, und}

$$(f'(x)) = -2[xb]b \mp 2[xa]a,$$
$$f''(x) = 2\{[lb]^2 \pm [la]^2\},$$

daher

$$f''(x)(f'(x))^2 = 2\{[(f'(x))b]^2 \pm [(f'(x))a]^2\}$$
$$= 8\{[xa]^2 \pm [xb]^2\}[ab]^2 = \pm 8[ab]^4.$$

Also wird die Kraft proportional mit $\frac{r}{(f'(x)r)^3}$. Auch können wir statt $f'(x)r$ seinen Werth

$$2\{[xb][rb] \pm [xa][ra]\}$$

schreiben. Ist also A der Lückenausdruck

$$A = [bl][bl] \pm [al][al],$$

so ist die Kraft

$$= \mp \alpha^2 \frac{[ab]^4}{(Axr)^3} \cdot r.$$

Ist insbesondere $x = r$, so wird der Nenner constant $= [ab]^6$, das

*) Ist $p = x_1 e_1 + x_2 e_2$ und $f'(x)p = x_1 A_1 + x_2 A_2$, so wird

$$(f'(x)) = -A_1 e_2 + A_2 e_1. \qquad \text{(A. d. H.)}$$

**) Sind die Zahlen x_1 und x_2 so bestimmt, dass $x = x_1 a + x_2 b$, so ist für Ellipse oder Hyperbel $x_1{}^2 \pm x_2{}^2 = 1$. Aber man hat dann

$$[xa] = -x_2[ab], \quad [xb] = x_1[ab]. \qquad \text{(A. d. H.)}$$

heisst die elliptische Bahn mit dem Mittelpunkt als Kraftcentrum wird mit einer der Entfernung proportionalen Centripetalkraft durchlaufen.

Ist $x = r + e$, [wo e die Strecke vom Mittelpunkt bis zum Brennpunkt, so folgt, weil e mit a parallel ist,

$$Axr = Arr + Are = \pm [ra]^2 + [rb]^2 + [be][br].$$

Dies ist*)

$$= a(a^2 - e^2)\varrho,$$

so dass die Kraft

$$= -\alpha^2 \frac{a}{b^2 \varrho^3} \cdot r$$

wird}, also ihrer Grösse nach mit $\frac{1}{\varrho^2}$ proportional.

IX.

Bewegung auf einer sich gleichmässig drehenden Curve.

{Setzt man in den Gleichungen (8) § 4 auf Seite 58

$$\frac{\partial}{\partial x} L = l, \quad \frac{\partial}{\partial x} M = m,$$

so wird die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = p + \lambda l + \mu m$$

und folglich ist}

$$\left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - p\right) lm\right] = 0.$$

Es seien e_1, e_2, e_3 die Grundmaasse, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des beweg-

*) Sind $r r_1$ die beiden Strecken von den Brennpunkten nach einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel, ϱ und ϱ_1 ihre Längen, so ist, für die ganze Ellipse und den einen Hyperbelast,

$$\varrho_1 \pm \varrho = 2a, \quad r_1 - r = 2e,$$

daher

$$\varrho_1{}^2 - \varrho^2 = [(r_1 - r)] \mid (r_1 + r)] = 4a^2 \mp 4a\varrho,$$

$$[e \mid (r_1 + r)] = 2a^2 \mp 2a\varrho,$$

dies verbunden mit

$$[e \mid (r_1 - r)] = 2e^2$$

liefert

$$[e \mid r] = a^2 - e^2 \mp a\varrho.$$

Es ist aber $[e \mid r] = [r \mid e] = \frac{e}{b}[rb]$, daher

$$[br] = -\frac{b}{e}(a^2 - e^2 \mp a\varrho).$$

Weiter ist

$$b^2 = \pm(a^2 - e^2), \quad [ra]^2 = \frac{a^2}{b^2}[r \mid b]^2, \quad [rb]^2 + [r \mid b]^2 = b^2 r^2.$$

Führt man diese Werthe oben ein, so ergiebt sich der Werth von Axr. (A. d. H.)

lichen Punktes, e_1 sei die Drehaxe und die Richtung der Schwere g. x_2 und x_3 seien Funktionen von x_1

$$x_2 = g(x_1), \quad x_3 = h(x_1)$$

zur Zeit $t = 0$, {so sind die Bedigungsgleichungen

$$x_2 - g(x_1) = 0, \quad x_3 - h(x_1) = 0$$

und damit wird nach § 1 Seite 50}

$$l = -g'(x_1)e_1 + e_2,$$
$$m = -h'(x_1)e_1 + e_3,$$

also

$$[lm] = -g'(x_1)e_1e_3 - h'(x_1)e_2e_1 + e_2e_3 = |\left(e_1 + e_2\frac{dg(x_1)}{dx_1} + e_3\frac{dh(x_1)}{dx_1}\right).$$

Ferner sei $e_2g(x_1) + e_3h(x_1) = r$ gesetzt, so wird also

$$[lm] = |\left(e_1 + \frac{dr}{dx_1}\right).$$

{Zur Zeit t ist aus x geworden

$$e_1x_1 + re^{i\alpha t},$$

aus $\frac{dr}{dx_1}$ aber $\frac{dr}{dx_1}e^{i\alpha t}$, wenn α die Winkelgeschwindigkeit ist, und damit wird die Bewegungsgleichung

$$\left[\left(e_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - ge_1 + \frac{d^2}{dt^2}(re^{i\alpha t})\right) | \left(e_1 + e^{i\alpha t}\frac{dr}{dx_1}\right)\right] = 0,$$

oder weil r auf e_1 senkrecht ist,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - g + \left[\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\alpha t}) \mid e^{i\alpha t}\frac{dr}{dx_1}\right] = 0.$$

Aber es ist

$$\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\alpha t}) = e^{i\alpha t}\left(\frac{d^2r}{dt^2} + 2i\alpha\frac{dr}{dt} - \alpha^2 r\right)$$

und das innere Produkt ändert sich nicht, wenn beide Faktoren in derselben Ebene um denselben Winkel gedreht werden. Daher ist

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}(re^{i\alpha t}) \mid e^{i\alpha t}\frac{dr}{dx_1}\right] = \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \alpha^2 r\right) \mid \frac{dr}{dx_1}\right] + 2\alpha\left[i\frac{dr}{dt} \mid \frac{dr}{dx_1}\right].$$

Im letzten Produkt rechts ist $\frac{dr}{dt}$ mit $\frac{dr}{dx}$ parallel, also steht $i\frac{dr}{dt}$ auf $\frac{dr}{dx}$ senkrecht, sodass dieses Produkt gleich Null ist. Daher die Gleichung

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - g + \left[\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \alpha^2 r\right) \mid \delta r\right] = 0.$$

Es ist aber

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{dx_1^2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{dx_1}\cdot\frac{d^2x_1}{dt^2},$$

folglich

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\left(1 + \left(\frac{dr}{dx_1}\right)^2\right) + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2\left[\frac{d^2r}{dx_1^2} \mid \frac{dr}{dx_1}\right] = g + \alpha^2\left[r \mid \frac{dr}{dx_1}\right].$$

Die Curve sei eben und liege in der Ebene $e_1 e_2$, so ist $h(x_1) = 0$, r wird $= e_1 g(x_1)$, daher hat man die Gleichung

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2}(1 + g'(x_1)^2) + \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 g'(x_1) g''(x_1) = g + \alpha^2 g(x_1) g'(x_1)^*).$$

X.

Zur Theorie des Foucault'schen Pendels.**) (1853.)

Ist p_0 der Träger des Aufhängepunkts des Pendels, ω die Strecke vom Aufhängepunkt zum Pendelpunkt, so zeigt die in § 6 Seite 65 angestellte Betrachtung, dass

$$(\delta^2 \omega + 2\alpha\delta\omega + \alpha^2(p_0 + \omega))\, e^{\alpha t}$$

gleich ist der Summe der zur Zeit t auf den Pendelpunkt wirkenden Kräfte. Diese sind, zur Zeit $t = 0$, 1) die Anziehung der Erde, die nach Grösse und Richtung $-g'$ sei am Orte des Pendelpunktes, 2) die Spannung des Fadens $= \lambda\omega$, wo λ eine Zahl, 3) der Widerstand der Luft, der dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei und also $= -\mu(\delta\omega)\delta\omega$ gesetzt werden kann, wenn μ ein Zahlenfaktor ist und $(\delta\omega)$ die Länge von $\delta\omega$ bezeichnet. Die Summe der Kräfte zur Zeit t ist also

$$= e^{\alpha t}(-g' + \lambda\omega - \mu(\delta\omega)\delta\omega),$$

so dass man die Gleichung

$$\delta^2\omega + 2\alpha\delta\omega + \alpha^2(p_0 + \omega) = -g' + \lambda\omega - \mu(\delta\omega)\delta\omega$$

hat. Die Strecke $-g' - \alpha^2(p_0 + \omega)$ ist die wirkliche Schwere am Orte des Pendelpunktes, die sich aus der Erdanziehung und der Centrifugalkraft zusammensetzt. Sie sei für die Ruhelage des Pendels mit $-g$ und für die Verschiebung mit $-g - u$ bezeichnet. Setzt man ein, so erhält man

$$[\delta^2\omega \,.\, \omega] + 2[\alpha\delta\omega \,.\, \omega] + [(g + u)\omega] + \mu(\delta\omega)[\delta\omega \,.\, \omega] = 0.$$

Nun sei $-l$ das Pendel in der Gleichgewichtslage, und

$$\omega = -l + \varrho + \eta,$$

wo ϱ senkrecht und η parallel l ist. Dann wird

$$(1) \qquad -[\varrho'' l] + [g\varrho] + \theta = 0,$$

wenn man mit θ die Summe

$$[\varrho''(\varrho + \eta] + [\eta''\varrho] + 2[\alpha\delta\omega \,.\, \omega] + [u\omega] + \mu(\delta\omega)[\delta\omega \,.\, \omega]$$

bezeichnet.

---

*) Vgl. Jullien, Probl. méc. rat. Bd. II. Seite 236 ff.

**) In möglichstem Anschluss an das MS. vom Herausgeber frei bearbeitet.

Lässt man zuerst θ weg, so erhält man die Gleichung

$$-[\varrho'' l] + [g\varrho] = 0. \tag{2}$$

Setzt man

$$\varrho = G \cos \varkappa t + H \sin \varkappa t,$$

wo G und H zwei constante, zu l senkrechte Strecken bedeuten, so folgt

$$\varrho'' = -\varkappa^2 \varrho.$$

Daher muss

$$\varkappa^2 [\varrho l] + [g\varrho] = 0,$$
$$[\varrho(\varkappa^2 l - g)] = 0$$

sein, also $\varkappa^2 l = g$, was möglich ist, weil l und g parallel sind, und woraus

$$\varkappa = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

folgt.

Die Gleichung für ϱ stellt eine Ellipse dar. Sind E_1 und F_1 ihre Halbaxen, T die Zeit, wo sich der Pendelpunkt am Ende von E_1 befindet, so ist

$$E_1 \cos \varkappa(t-T) + F_1 \sin \varkappa(t-T)$$

eine Strecke, deren Endpunkt die nämliche Ellipse durchläuft. Nimmt man an, diese Ellipse drehe sich in der Horizontalebene, und E_1 mache zur Zeit t mit der einen Axe e_1, der zwei festen gegeneinander senkrechten Axen e_1 und e_2, den Winkel ψ, so kann man setzen

$$E_1 = E(e_1 \cos \psi + e_2 \sin \psi),$$
$$F_1 = F(-e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi),$$

so dass

$$\varrho = E(e_1 \cos\psi + e_2 \sin\psi) \cos \varkappa(t-T) + F(-e_1 \sin\psi + e_2 \cos\psi) \sin \varkappa(t-T)$$

sich ergiebt.

Sind die vier Zahlen E, F, ψ, T constant, so genügt dieser Ausdruck der Gleichung (2) und man kann nun versuchen diese vier Grössen als Funktionen der Zeit so zu bestimmen, dass er auch der Gleichung (1) genügt.*)

*) Für diese Bestimmung sei auf Claussen, Pogg. Ann. Ergänzungsband 4, Seite 155 verwiesen, da Grassmann diesem Aufsatz sich eng anschliesst. (A. d. H.)

XI.

Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre.

Zweite Abhandlung.*)

§ 1. Ich beschränke mich in dieser Abhandlung auf die Anwendung des Begriffs der Punktgrösse erster und zweiter Stufe auf die Mechanik.

Es ist an sich naturgemässer statt der Strecke x, deren Anfangspunkt fest ist, nur ihren Endpunkt zu bezeichnen, da ihr Anfangspunkt etwas willkürliches in die Betrachtung hineinbringt. Allein dann muss dieser Punkt als Grösse aufgefasst werden, sodass an ihrem Begriff ein zweifaches hervortritt, erstens die Lage des Punktes und zweitens eine Zahlgrösse (nach der Ausdehnungslehre von 1844 das Gewicht). Das Zeitdifferential δ setzt aber die Unveränderlichkeit des Gewichts voraus. Durch diese neue Betrachtungsweise werden die Formeln der ersten Abhandlung {Seite 46 ff.} nicht wesentlich verändert; aber ganz neue Beziehungen treten durch die Punktgrössen zweiter Stufe hervor, Beziehungen, welche zwar von Poinsot, Möbius, Plücker, v. Staudt, Felix Klein (Math. Ann. Bd. 4, Seite 403 ff.) theilweise dargestellt, aber nicht auf ihr Wesen zurückgeführt sind.

Als Punktgrösse zweiter Stufe erscheint nämlich nach der Ausdehnungslehre von 1844 {$\mathfrak{A}_1$ § 106 ff.; $\mathfrak{A}_2$ § 247, § 249} das Produkt zweier Punkte, das heisst der Linientheil, der zwischen den einfachen Punkten liegt, welche die Faktoren bilden, so nämlich, dass zwei Produkte $[ab]$ und $[cd]$, in welchen a, b, c, d einfache Punkte sind, dann und nur dann als Linientheile einander gleichgesetzt werden, wenn $[ab]$ und $[cd]$ in derselben geraden Linie liegen und gleiche Richtung und Länge haben. Ausserdem erscheinen aber als Punktgrössen zweiter Stufe die Summen solcher Linientheile (Plücker's lineäre Complexe und v. Staudt's Nullsystem).

Sowie aber die Differenz $[a - b]$ zweier einfacher Punkte als unendlich ferner Punkt, genauer als Strecke, sich darstellt, nämlich als die Strecke, die von b nach a gezogen wird und diese Strecke gleichfalls als Punktgrösse erster Stufe aufgefasst werden muss, so erscheint das Produkt von zwei Strecken, das heisst der Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenenrichtung als unendlich entfernter Linientheil {$\mathfrak{A}_2$ § 276}. Schon in der Ausdehnungslehre von 1844 {§§ 122—124}

*) Nach mehreren MS., deren eines von Grassmann wenige Wochen vor seinem Tode einem seiner Söhne dictirt wurde. (A. d. H.)

sind diese Begriffe auf die Mechanik angewandt, indem die auf einen festen Körper wirkende Kraft, da sie ihre Wirkung nicht ändert, sobald sie als Linientheil gleich bleibt, auch als solcher Linientheil aufgefasst ist. Es ist hieraus das Gesetz abgeleitet, dass die auf einen festen Körper wirkenden Kräfte stets der Summe dieser Kräfte gleichwirkend sind. Ist S diese Summe, so ist die Bedingung dafür, dass S wieder ein Linientheil ist, ausgedrückt durch die Gleichung $[SS]=0$ oder, wenn

$$S = A + B + C + \cdots$$

ist,

$$2[AB] + 2[AC] + 2[BC] + \cdots = 0$$

{vgl. $\mathfrak{A}_1$ § 124; $\mathfrak{A}_2$ § 286}. Die unendlich entfernten Linientheile werden dann die Poinsot'schen Kräftepaare (vgl. auch Math. Ann. Bd. 4, Seite 404 Anmerk. ***).

Die Darstellung des Zusammenhangs der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper von F. Klein (Math. Ann. Bd. 4, Seite 403—415) {sowie die Theorie des Nullsystems von v. Staudt} entbehrt des durch die Ausdehnungslehre dargebotenen einheitlichen Bandes. Dies beruht in der (nicht auf eine gerade Linie zurückführbaren) Summe S der Linientheile, welche sowohl das Staudt'sche Nullsystem als den Plücker-schen linearen Complex umfasst. Die Ebene, welche einem Punkt a entspricht ist $[aS]$, der Punkt, welcher einer Ebene α entspricht $[\alpha S]$, die Nulllinien P sind die der Gleichung $[PS]=0$ entsprechenden {und sie bilden den durch S bestimmten Complex.*)}

---

*) Sind p, a, b, c, d einfache Punkte, so folgt

$$[p \,.\, ab \,.\, ab] = 0,$$

$$[p \,.\, ab \,.\, ac] + [p \,.\, ac \,.\, ab] = 0 = p[ab \,.\, ac] + p[ac \,.\, ab],$$

$$[p \,.\, ab \,.\, cd] + [p \,.\, cd \,.\, ab] = p[abcd].$$

Daraus ergiebt sich dass, wenn P und Q irgend zwei Linientheile sind, stets

$$[pPQ] + [pQP] = p[PQ]$$

ist und weiter, dass für irgend eine Summe S von Linientheilen

$$[pSS] = \tfrac{1}{2}p[SS]$$

ist. Mit Hilfe der Ergänzungen ergiebt sich für einen Ebenentheil π die Gleichung

$$[\pi SS] = \tfrac{1}{2}\pi[SS].$$

Definirt man nun eine reciproke Beziehung, indem man einem Punkt a die Ebene $[aS]$ entsprechen lässt, so entspricht der Ebene α der Punkt p, der aus $[pS] = \alpha$ folgt und $\equiv [\alpha S]$ wird. Da, wenn $[\alpha S] \equiv$ dem Punkt t gesetzt wird, $[aS \,.\, \alpha S] \equiv [aSt] \equiv [atS]$ wird, so folgt aus $[a\alpha] = 0$ auch $[aS \,.\, \alpha S] = 0$. Diese Gleichung ist aber nach Staudt, Geom. d. Lage § 10 Seite 60 Bedingung der reciproken Beziehung. Da ferner der Ebene $[aS]$ der Punkt $[aS \,.\, S] \equiv a$ entspricht und dem Punkt $[\alpha S]$ die Ebene $[\alpha S \,.\, S] \equiv \alpha$, so ist die Beziehung

Die involutorische Lage zweier linearer Complexe, richtiger zweier Grössen zweiter Stufe, S und S_1, ist durch die Gleichung bedingt $[SS_1] = 0$. Ist S {mit Hilfe von vier Punkten a, b, c, d in der Form}

$$S = xab + x'cd + yac + y'db + zda + z'bc,$$

{wo die Koefficienten x, x', y, y', z, z' Zahlen sind} dargestellt und S_1 entsprechend mit dem Index 1, so wird die Gleichung

$$xx_1' + x'x_1 + yy_1' + y'y_1 + zz_1' + z'z_1 = 0.$$

Also Incidenz {der beiden Grössen S und S_1}.*)

§ 2. Jede irreducibele, das heisst nicht auf eine Einzelkraft reducirbare Summe ist zurückführbar auf zwei Kräfte und zwar sind dabei vier numerische Bestimmungen willkürlich, nämlich

a) ein Punkt der einen Kraft und die Ebene der andern, falls nur beide, Punkt und Ebene auseinanderliegen {siehe $\mathfrak{A}_2$ Nr. 285 oder}

b) die Lage der einen Kraft, falls sie nicht die Lage einer Nulllinie hat.

Ist nämlich $[ab]$ die {Linie der} einen Kraft und

$$S = x[ab] + [cd],$$

wo x eine Zahl, so folgt, dass $S - x[ab]$ sich auf eine Liniengrösse reduciren, also

$$[S - x[ab]]^2 = 0$$

sein muss, woraus

$$S^2 - 2x[Sab] = 0,$$

$$x = \frac{S^2}{2[Sab]}$$

sich ergiebt, wenn nicht $[Sab] = 0$, also $[ab]$ eine Nulllinie ist. Weiter hat man

$$[aS] = [acd], \quad [bS] = [bcd],$$

$$[aS \,.\, bS] = [acd \,.\, bcd] = [cd] \cdot [abcd],$$

womit $[cd]$ bestimmt ist. Dies setzt $[abcd] \neq 0$ voraus. Wäre $[abcd] = 0$, so wäre $[abS] = 0$, also $[ab]$ eine Nulllinie. Ist dies ausgeschlossen, so ist folglich

---

eine involutorische (Staudt, l. c. § 16 Nr. 213 Seite 118). Endlich geht, weil $[a \,.\, aS] = 0$ ist, die dem Punkte a entsprechende Ebene durch a selbst, also giebt die Beziehung ein Nullsystem (Staudt, l. c. § 24 Nr. 321 Seite 191). Soll ab eine Nulllinie sein, so muss jeder Punkt $pa + qb$ in dem Schnitt der Ebenen $[aS]$ und $[bS]$ liegen, wozu nur $[abS] = 0$ zu sein braucht. Vgl. auch Möbius' Werke Bd. 1, Seite 489 und Bd. 3, Seite 122. (A. d. H.)

*) Ist S_1 eine Liniengrösse, so ist

$$x_1 x_1' + y_1 y_1' + z_1 z_1' = 0,$$

und die Bedingung, dass S_1 eine Nulllinie ist, wird dann durch die Gleichung des Textes gegeben, die zeigt, dass die Nulllinien einen Complex bilden. (A. d. H.)

$$S^2 = 2[abcd],$$
$$[cd] = \frac{2[aS\,.\,bS]}{S^2}.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt, so ist $S = p[ab] + [cd]$, wo p ein Zahlenfaktor ist.

Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}S^2 = [abcd]$$

spricht einen bekannten Satz von Chasles aus {Gergonne Annal. XVIII, Seite 372. Schell, Theor. d. Bew. u. d. Kräfte 2. Aufl. Bd. 1, Seite 60; Bd. 2, Seite 27.}

§ 3. Wenn nun, wie leicht zu zeigen, die unendlich kleine Rotationsbewegung um eine Axe gleichfalls durch einen Linientheil vollkommen dargestellt werden kann, indem nämlich die Grösse der unendlich kleinen Rotation durch die Länge dieses Linientheils dargestellt wird {vgl. Seite 80} und ferner sich ergiebt, dass das Resultat zweier unendlich kleiner um verschiedene Axen stattfindender Rotationen stets von der Reihenfolge derselben unabhängig ist, also das Grundgesetz der Addition gilt, so versteht sich von selbst, dass alle Gesetze für die Wirkung der Kräfte auf einen festen Körper identisch sind mit den Gesetzen dieser Rotation, vorausgesetzt, dass jene Kräfte und diese Rotationen als Punktgrössen zweiter Stufe aufgefasst werden {vgl. auch $\mathfrak{A}_2$ Nr. 347 Anm.}.

§ 4. Fliehmoment einer Kraft p — als Strecke gedacht — in Bezug auf einen Punkt, von dem der Angriffspunkt um {die Strecke} r entfernt ist, ist

$$[p \mid r]^{*)}$$

und so das Fliehmoment für eine Reihe von Kräften

$$= \Sigma[p \mid r].$$

Aendert sich der Bezugspunkt, wird er etwa q, so wird jene Summe

$$= \Sigma[p \mid (r - q)] + \Sigma[p \mid q],$$

oder, wenn $\Sigma p = s$ ist,

$$= \Sigma[p \mid (r - q)] + [s \mid q].$$

Wann ist $\Sigma[p \mid (r - q)] = 0$, das heisst $\Sigma[p \mid r] = [s \mid q]$? Es sei $\Sigma[p \mid r] = \alpha s^2$, so muss sein $[s \mid (\alpha s - q)] = 0$, das heisst $\alpha s - q$ normal zu s, wodurch die Lage q bestimmt ist; q liegt in der durch den Punkt αs bestimmten gegen s senkrechten Ebene. Es versteht

*) Vgl. Schweins, Journ. f. Math. Bd. 38, S. 77.

sich von selbst, dass die Linie, in welcher der Endpunkt von q liegt, zu s senkrecht ist. Der Ort der Punkte q ist bei einem ebenen Kraftsystem die Hauptlinie, bei einem räumlichen System die Hauptebene.

XII.

Trägheitsmoment.*)

§ 1. Es sei x der Radius des in Bewegung begriffenen Punktes eines festen Körpers und P die zugehörige äussere Kraft, m die Masse des Punktes, so hat man die Gleichung {vgl. Seite 54}

$$\Sigma m\left[x\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \Sigma[xP].$$

Die linke Seite ist $\frac{d}{dt}\Sigma m\left[x\frac{dx}{dt}\right]$ oder der Differentialquotient der Flächengeschwindigkeit. Wenn nun der Körper einen festen Punkt hat, in dem der Ursprung der Strecke x liegt, so besitzt er eine von Moment zu Moment wechselnde instantane Drehungsaxe. Ist diese p und stellt die Länge von p die Grösse der Winkelgeschwindigkeit um diese Axe vor, so ist {vgl. Seite 79 § 16}

$$\frac{dx}{dt} = |\,[px]^{**)},$$

also die Flächenbewegung

$$= \Sigma m[x \mid px].$$

Setzt man

$$Sp = \Sigma m[px \mid x],$$

so wird die Flächenbewegung $= \mid Sp$. Nun ist allgemein

$$[q \mid Sp] = \Sigma m[q(x \mid px)] = \Sigma m[qx \mid px] = \Sigma m[px \mid qx] = [p \mid Sq].$$

Daher wird

$$[p \mid Sp] = \Sigma m[px \mid px] = \Sigma m \cdot p^2x^2 \sin^2 px,$$

das heisst gleich p^2mal dem Trägkeitsmoment in Bezug auf die Axe p. Somit ist das Trägheitsmoment

$$= \frac{[p \mid Sp]}{p^2}.$$

---

*) § 1 ist in möglichst engem Anschluss an die MSS. vom Herausgeber frei bearbeitet. (A. d. H.)

**) In dem MS., dem die obige Mittheilung entnommen ist, setzt Grassmann $\frac{dx}{dt}$ gleich $\dot{p}x$, wo der Punkt über dem Zeichen die Strecke andeuten soll. Dies MS. ist überschrieben „nach Jacobi Crelle 39" und enthält die populäre Erklärung der Erscheinungen des Fessel'schen Rotationsapparates aus dem Flächensatz, die Grassmann 1856 in der Naturforschenden Gesellschaft zu Stettin (Sitzung am 31. Januar) gegeben hat, wie mir Herr Dr. H. Grassmann in Halle mitgetheilt hat. Darf man daraus vielleicht schliessen, dass Grassmann in den fünfziger Jahren das äussere Produkt zweier Strecken wieder als Strecke gedeutet hat, wie Hamilton dies that? (A. d. H.)

§ 2. Die lebendige Kraft T ist

$$\sum \frac{m}{2} (\,|\,[px])^2 = \left[\sum \frac{m}{2} [px \,|\, px] = \tfrac{1}{2}[p \,|\, Sp]\right].$$

Ist x_0 der Träger des Schwerpunktes und gehen die Träger x vom Schwerpunkt aus, so ist die Gesammtgeschwindigkeit eines Punktes

$$= \frac{dx_0}{dt} + \,|\,[px].$$

Daher die lebendige Kraft T

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx_0}{dt} + \,|\,[px]\right)\left(\,|\,\frac{dx_0}{dt} + [px]\right)\right],$$

$$2T = \left[\frac{dx_0}{dt} \,|\, \frac{dx_0}{dt}\right] \Sigma m + \,|\, \Sigma m \left[px \cdot \frac{dx_0}{dt}\right] + \Sigma m \left[\frac{dx_0}{dt} \cdot px\right] + \Sigma m [px \,|\, px],$$

oder weil die x vom Schwerpunkt ausgehen, also $\Sigma mx = 0$ ist,

$$2T = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 \Sigma m + \Sigma m [px]^2.$$

§ 3. Um die Hauptaxen zu finden, haben wir drei aufeinander senkrechte Einheitsstrecken a, b, c zu finden, so dass

$$(1) \qquad Sp = A[p \,|\, a]a + B[p \,|\, b]b + C[p \,|\, c]c$$

wird.*) Dann folgt

$$(2) \qquad Sa = Aa, \quad Sb = Bb, \quad Sc = Cc.$$

Sind umgekehrt diese Gleichungen erfüllt für drei Strecken a, b, c, so folgt aus ihnen

$$[b \,|\, Sa] = A[a \,|\, b], \quad [a \,|\, Sb] = B[b \,|\, a],$$

daher weil $[b \,|\, Sa] = [a \,|\, Sb]$,

$$(A - B)[a \,|\, b] = 0,$$

also wenn $A \mathrel{+\!\!\!|} B$ ist, $[a \,|\, b] = 0$, das heisst b auf a senkrecht.

Ebenso folgt, wenn $A \mathrel{+\!\!\!|} C$, $B \mathrel{+\!\!\!|} C$, dass c auf a und auf b senkrecht ist. Da nun aus

$$p = \alpha a + \beta b + \gamma c$$
$$Sp = \alpha Sa + \beta Sb + \gamma Sc$$

folgt, so wird

$$Sp = \alpha Aa + \beta Bb + \gamma Cc$$

und weil

$$\alpha = [p \,|\, a], \quad \beta = [p \,|\, b], \quad \gamma = [p \,|\, c],$$

ergiebt sich der Ausdruck (1) für Sp.

---

*) Setzt man nämlich $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$, so wird $[p \,|\, a] = \alpha$ und so weiter und

$$Sp = A\alpha a + B\beta b + C\gamma c,$$
$$[p \,|\, Sp] = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2,$$

wie es sein muss. (A. d. H.)

Setzt man nun um die (2) zu erfüllen

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

wo e_1, e_2, e_3 drei gegenseitig senkrechte Einheitsstrecken sind und x, y, z noch zu bestimmende Zahlen, und weiter

$$Se_1 = e', \quad Se_2 = e'', \quad Se_3 = e''',$$

so folgt

$$Sa = xe' + ye'' + ze'''$$

und die Gleichung $Sa = Aa$ liefert dann

$$x(e' - Ae_1) + y(e'' - Ae_2) + z(e''' - Ae_3) = 0,$$

{und durch Multiplikation mit zweien der Koefficienten, da nicht die drei Grössen x, y, z Null sein sollen}

$$(e' - Ae_1)(e'' - Ae_2)(e''' - Ae_2) = 0,$$

was eine Gleichung dritten Grades für A ist.

Sei A_1 eine reelle Wurzel und dann

$$e' - A_1 e_1 = p_1, \quad e'' - A_1 e_2 = p_2, \quad e''' - A_1 e_3 = p_3,$$

{so folgt

$$xp_1 + yp_2 + zp_3 = 0$$

und daher

$$x[p_1 p_3] + y[p_2 p_3] = 0,$$
$$y[p_1 p_2] + z[p_1 p_3] = 0,$$
$$x[p_1 p_2] + z[p_3 p_2] = 0.$$

Weil die drei Strecken p_1, p_2, p_3 derselben Ebene parallel sind, stehen die drei Produkte $[p_1 p_2]$, $[p_2 p_3]$, $[p_3 p_1]$ in einer Zahlbeziehung und es ergiebt sich}

$$x : y : z = [p_2 p_3] : [p_3 p_1] : [p_1 p_2].$$

Um die beiden andern Strecken b und c zu suchen, setzen wir statt e_1, e_2, e_3 jetzt die drei Maasse e_1, e_2, a, wo e_1, e_2 senkrecht gegen a angenommen sind, sonst aber das Normalsystem $e_1 e_2 a$ willkürlich ist, während e_1, e_2 natürlich andere Bedeutung haben als eben; und es sei

$$b = ue_1 + ve_2 + wa.$$

Sei nun

$$Se_1 = e', \quad Se_2 = e'',$$

so liefert die Gleichung $Sb = Bb$

$$u(e' - Be_1) + v(e'' - Be_2) + wa(A - B) = 0,$$
$$(e' - Be_1)(e'' - Be_2)a(A - B) = 0,$$

also wenn $A \mathrel{+\!\!\!|\!\!\!|} B$

$$(e' - Be_1)(e'' - Be_2)a = 0.$$

Es ist dann

$$[a \mid e'] = [a \mid Se_1] = [e_1 \mid Sa] = [e_1 \mid a] = 0,$$

daher e' und ebenso e'' senkrecht auf a. Ferner ist

$$[e_2 \mid e'] = [e_2 \mid Se_1] = [e_1 \mid Se_2] = [e_1 \mid e''].$$

Somit kann man setzen

$$(3) \qquad \begin{cases} e' = \alpha_1 e_1 + \alpha e_2, \\ e'' = \alpha e_1 + \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

Damit wird die Gleichung für B

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha e_2 - Be_1)(\alpha e_1 + \alpha_2 e_2 - Be_2) a = 0,$$

oder

$$(4) \qquad (\alpha_1 - B)(\alpha_2 - B) = \alpha^2.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind stets reell, weil die linke Seite von Null bis ins Unendliche wächst, wenn man B von dem grösseren der beiden Werthe α_1 und α_2 an wachsen lässt.

Ist B_1 ein Wurzelwerth, so wird

$$(5) \quad u:v = (e'' - B_1 e_2) a : -(e' - B_1 e_1) a = e'' - B_1 e_2 : -(e' - B_1 e_1).$$

Hierdurch sind a und b, A und B bestimmt; c ist, wenn $B \neq C$, senkrecht auf a und b.

§ 4. Es seien jetzt Axen und Momente in Bezug auf einen Körper gesucht, der nach beiden Seiten der $\eta\zeta$-Ebene symmetrisch ist. So ist $\Sigma m \xi \zeta = 0$, $\Sigma m \eta \xi = 0$, also ist in der That die ξ-Axe, das heisst die gegen die Symmetrieebene senkrechte Linie, eine der Hauptaxen; sie sei a'. Das Moment in Bezug auf sie ist $\Sigma m(\eta^2 + \zeta^2) = A$. Nun seien e_1 und e_2 zwei gegen a senkrechte Strecken und {nach Gl. (3)}

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [e' \mid e_1] = [Se_1 \mid e_1] = \Sigma m[e_1 x \mid e_1 x] = \Sigma m[e_1 x]^2, \\ \alpha_2 &= [e'' \mid e_2] = [Se_2 \mid e_2] = \Sigma m[e_2 x \mid e_2 x] = \Sigma m[e_2 x]^2, \\ \alpha &= [e' \mid e_2] = [Se_1 \mid e_2] = [e'' \mid e_1] = \Sigma m[e_1 x \mid e_2 x], \end{aligned}$$

so sind B, C, b, c durch die Gleichungen (4) und (5) bestimmt.

§ 5. Es sei die Aufgabe gestellt: Aus den Hauptaxen und den Momenten zweier Theile die des Ganzen zu finden. Hiebei können wir die Axen durch denselben Punkt gehend annehmen. Es seien a_1, a_2, a die Axen, A_1, A_2, A die zugehörigen Momente des einen, b_1, b_2, b, B_1, B_2, B die entsprechenden Grössen des andern Theiles und c_1, c_2, c, C_1, C_2, C die des Ganzen. Also, wenn man

$$\Gamma p = C[p \mid c]c + C_1[p \mid c_1]c_1 + C_2[p \mid c_2]c_2$$

setzt,

$$\begin{aligned} \Gamma p = {} & A[p \mid a]a + A_1[p \mid a_1]a_1 + A_2[p \mid a_2]a_2 \\ & + B[p \mid b]b + B_1[p \mid b_1]b_1 + B_2[p \mid b_2]b_2. \end{aligned}$$

Setzt man $p = c$, so folgt

$$Cc = A[c \mid a]a + A_1[c \mid a_1]a_1 + A_2[c \mid a_2]a_2$$
$$+ B[c \mid b]b + B_1[c \mid b_1]b_1 + B_2[c \mid b_2]b_2,$$

c sei $= x_1 a_1 + x_2 a_2 + xa$ und $\Gamma a_1 = a_1'$, $\Gamma a_2 = a_2'$, $\Gamma a = a'$, so hat man

$$0 = x_1(Ca_1 - a_1') + x_2(Ca_2 - a_2') + x(Ca - a'),$$

also

$$(Ca_1 - a_1')(Ca_2 - a_2')(Ca - a') = 0,$$

wo

$$a' = Aa + B[a_1 \mid b]b + B_1[a_1 \mid b_1]b_1 + B_2[a_2 \mid b_2]b_2$$

und so weiter.

XIII.

Bewegung durch einen Stoss.

1839 und 1842.

§ 1. {Ist C die Momentan- oder Stosskraft, die auf einen Punkt mit dem Träger p wirkt, so giebt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\sum\left[\left(m\frac{dp}{dt} - P\right) \mid \delta p\right] = 0,$$

wobei} $\frac{dp}{dt} = p'$ die Geschwindigkeit ist, welche, nachdem die Körper sich verlassen haben, mitgetheilt ist. {Für ein freies System ist also}

$$\sum m\frac{dp}{dt} = \Sigma P.$$

Setzt man $p = p_0 + \omega$, wo p_0 der Träger des Schwerpunktes, so folgt

$$p_0'\Sigma m = \Sigma P.$$

{Die erste Gleichung liefert dann

$$\Sigma[(mp_0' - P + m\omega') \mid \delta\omega] = 0.$$

Nun ist für einen festen Körper $\delta\omega = \mid [q\omega]$ (vgl. Seite 79, § 16), also muss sein

$$0 = \Sigma[(mp_0' - P + m\omega')q\omega] = \Sigma m[p_0'q\omega] + \Sigma[(m\omega' - P)q\omega].$$

Der erste Theil ist $= [p_0'q\Sigma m\omega] = 0$. Also bleibt

$$\Sigma[(m\omega' - P)q\omega] = 0$$

für beliebige q, daher}

$$\Sigma[(m\omega' - P)\omega] = 0$$

sein muss.

§ 2. {Ist das System eine ebene Scheibe, die sich in ihrer Ebene bewegt, so sei φ der Winkel, welchen der Träger ω zur Zeit t mit seiner Lage zur Zeit t_0 bildet und die ω_0 sei. Bezeichnen wir mit $\mid a$

eine Strecke, die aus a durch eine positive Drehung um 90⁰ hervorgeht (vgl. $\mathfrak{A}_2$ Nr. 331), so kann man

$$\omega = \cos\varphi\,\omega_0 + \sin\varphi \mid \omega_0$$

setzen, wodurch

$$\omega' = (-\sin\varphi\,\omega_0 + \cos a \mid \omega_0)\,\varphi' = \varphi' \mid \omega$$

wird. Damit wird die letzte Gleichung in § 1

$$\varphi' \Sigma m\omega^2 = -\Sigma[P\omega],$$

oder, wenn man das Trägheitsmoment $\Sigma m\omega^2 = M$ setzt}

$$\varphi' = -\frac{1}{M} \cdot \Sigma[P\omega].$$

Wirkt nun eine Stosskraft auf den Punkt mit dem Träger α, so hat man

$$mp_0' = P, \quad M\varphi' = -[P\alpha]$$

{wenn m die Gesammtmasse bezeichnet}. Die Geschwindigkeit a des gestossenen Punktes ist nun

$$a = p_0' + \varphi' \mid \alpha$$
$$= \frac{P}{m} - \frac{[P\alpha]}{m} \mid \alpha.$$

§ 3. Gegeben seien zwei Scheiben A_1 und A_2, ihre Schwerpunkte seien σ_1 und σ_2, der gemeinsame Punkt {in dem sie aufeinanderstossen} α mit den Trägern α_1 und α_2, die bezüglich von den Schwerpunkten σ_1 und σ_2 aus genommen sind, ihre Stosslinie (so nennen wir die Linie, welche gegen die Tangente, die an den Stosspunkt gezogen ist, senkrecht steht) B; die Geschwindigkeiten der Schwerpunkte vor dem Stosse p_1 und p_2 und die Schwenkungsgeschwindigkeiten um die Schwerpunkte ψ_1 bezüglich ψ_2, die Massen m_1, m_2, ihre Trägheitsmomente M_1, M_2. {Ist nun P die Stosskraft, die der zweite Körper auf den ersten ausübt, so theilt sie dem Schwerpunkt die Geschwindigkeit $\frac{P}{m_1}$ mit und giebt eine Rotationsgeschwindigkeit $\frac{[P\alpha_1]}{M_1}$}. Die mitgetheilte Geschwindigkeit des Punktes α_1 (sofern er nämlich dem Körper A_1 angehört) ist somit

$$\frac{P}{m_1} - \frac{[P\alpha_1]}{M_1} \mid \alpha_1.$$

Hiezu die ursprünglichen Geschwindigkeiten p_1 und $\psi_1 \mid \alpha$ hinzugerechnet, haben wir die Gesammtgeschwindigkeit

$$= p_1 + \frac{P}{m_1} + \psi_1 \mid \alpha_1 - \frac{[P\alpha_1]}{M_1} \mid \alpha_1,$$

beim unelastischen Stoss muss die Projektion der Geschwindigkeit auf die Stosslinie B für beide Körper die nämliche sein.

{Bezeichnen wir eine auf der Stosslinie B gelegene Strecke von der Länge Eins mit β und setzen P, das die Richtung von B hat, $= x_1\beta$, wo x_1 eine Zahl, so wird die Projektion

$$= [p_1 \mid \beta] + \psi_1[\mid \alpha_1 \cdot \mid \beta] + \frac{x_1}{m_1}[\beta \mid \beta] - \frac{x_1}{M_1}[\beta\alpha_1][\mid \alpha_1 \cdot \mid \beta],$$

oder weil

$$[\mid \alpha_1 \cdot \mid \beta] = \mid [\alpha_1\beta] = [\alpha_1\beta],$$

da ja $[\alpha_1\beta]$ eine Zahl ist,}

$$= [p_1 \mid \beta] + \psi_1[\alpha_1\beta] + \frac{x_1}{m_1} + \frac{x_1}{M_1}[\alpha_1\beta]^2.$$

Der Ausdruck für die entsprechende Geschwindigkeit des Punktes α, insofern er der zweiten Scheibe angehört, wird durch Vertauschung der Zeiger 1 und 2 gefunden, indem man zugleich $-x_1$ für x_1 setzt {weil die Stosskraft, die von A_1 auf A_2 ausgeübt wird, gleich $-P$ ist}. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert

$$[(p_1 - p_2) \mid \beta] + \psi_1[\alpha_1\beta] - \psi_2[\alpha_2\beta] =$$
$$= -x_1\left\{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{M_1}[\alpha_1\beta]^2 + \frac{1}{M_2}[\alpha_2\beta]^2\right\}.$$

Für zwei Kugeln {deren Schwerpunkte die Mittelpunkte sind} fallen α_1 und α_2 mit β in dieselbe Gerade, daher ist $[\alpha_1\beta] = [\alpha_2\beta] = 0$. {Die Strecke $p_1 - p_2$ ist ebenfalls mit β gleich- oder entgegengesetzt gerichtet. Nimmt man daher an, β sei von A_1 nach A_2 gerichtet und setzt

$$[p_1 \mid \beta] = q_1, \quad [p_2 \mid \beta] = q_2,$$

so folgt dann}

$$x_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(q_1 - q_2)$$

und die Drehung um den Schwerpunkt bleibt unverändert die gleiche wie vor dem Stosse.

XIV.

Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte.*)

Es seien an den Punkten $p_1, p_2, \cdots$ eines festen Körpers die Kräfte $\pi_1, \pi_2, \cdots$ angebracht. Es sei $\Sigma\pi = s$, das wir als von Null verschieden annehmen und

$$\pi_\lambda = \alpha_\lambda s + \beta_\lambda \sigma' + \gamma_\lambda \sigma'',$$

wo σ' und σ'' zwei gegenseitig und auf s senkrechte Strecken von der Länge Eins, α_λ, β_λ, γ_λ Zahlen sind. Weil $\Sigma\pi = s$ angenommen wurde, folgt

$$\Sigma\alpha_\lambda = 1, \quad \Sigma\beta_\lambda = 0, \quad \Sigma\gamma_\lambda = 0.$$

*) Vom Herausgeber frei bearbeitet im Anschluss an das MS.

Die Wirkungen der Kräfte auf den Körper hängen ab von der Summe

$$\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda] = [\Sigma \alpha_\lambda p_\lambda \cdot s] + [\Sigma \beta_\lambda p_\lambda \cdot \sigma'] + [\Sigma \gamma_\lambda p_\lambda \cdot \sigma''].$$

Da $\Sigma \alpha_\lambda = 1$ ist, ist $\Sigma \alpha_\lambda p_\lambda$ wieder ein einfacher Punkt O; da $\Sigma \beta_\lambda = \Sigma \gamma_\lambda = 0$ ist, stellen die beiden Summen $\Sigma \beta_\lambda p_\lambda$ und $\Sigma \gamma_\lambda p_\lambda$ Strecken vor, die wir mit α' und α'' bezeichnen wollen. Damit folgt

$$\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda] = [Os] + [\alpha'\sigma'] + [\alpha''\sigma''].$$

Die Strecken α' und α'' hängen von der Wahl der Richtungen σ' und σ'' ab. Ersetzt man sie durch zwei andere auf s und gegenseitig senkrechte Strecken τ' und τ'' von der Länge Eins, so wird

$$\sigma' = \alpha\tau' + \beta\tau'', \quad \sigma'' = \beta\tau' - \alpha\tau'',$$

wo zwischen den Zahlen α, β die Beziehung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ besteht. Daher wird

$$\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda] = [Os] + [(\alpha\alpha' + \beta\alpha'')\tau'] + [(\beta\alpha' - \alpha\alpha'')\tau''].$$

Die Richtungen α' und α'' gehen also in die $\alpha\alpha' + \beta\alpha''$, $\beta\alpha' - \alpha\alpha''$ über, und man kann α und β so bestimmen, dass diese aufeinander senkrecht sind. Dazu ist nöthig, dass

$$[(\alpha\alpha' + \beta\alpha'') \mid (\beta\alpha' - \alpha\alpha'')] = 0$$

ist, oder

$$\alpha\beta(\alpha'^2 - \alpha''^2) - \alpha^2[\alpha'' \mid \alpha'] + \beta^2[\alpha' \mid \alpha''] = 0,$$

woraus sich α und β ergeben. Seien dann die τ' und τ'' entsprechenden Richtungen p und q, und die an Stelle von α' und α'' tretenden Strecken a und b, so hat man

$$\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda] = [Os] + [ap] + [bq], \tag{1}$$

wo nun

$$\pi_\lambda = \alpha_\lambda s + \beta_\lambda' p + \gamma_\lambda' q,$$
$$\Sigma \beta_\lambda' p_\lambda = a, \quad \Sigma \gamma_\lambda' p_\lambda = b$$

gesetzt ist.

Drehen sich die Kräfte um irgend eine Axe, indem ihre Angriffspunkte fest bleiben, so dreht sich s um die nämliche Axe um denselben Winkel und O ändert sich nicht. Und wenn man auch die Strecken p und q entsprechend dreht, ändern sich die β_λ', γ_λ' auch nicht und damit auch nicht die Strecken a und b. Unter der Annahme also, dass man mit den Kräften auch die Strecken s, p, q mit drehe, gilt nun Gleichung (1) für jede Lage der Kräfte.

Soll sich $\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda]$ für eine Lage der Kräfte auf einen Linientheil reduciren, so muss dieser die Länge und Richtung von s haben. Ist r die Strecke von O nach seinem Angriffspunkt, so kann man dann

$$\Sigma[p_\lambda \pi_\lambda] = [(O + r)s]$$

setzen, so dass

(2) $$[rs] = [ap] + [bq]$$

sein muss. Multiplicirt man diese Gleichung mit s, so erhält man

$$0 = [aps] + [bqs].$$

Weil s, p, q gegenseitig senkrecht sind und p, q die Länge Eins haben, ist

$$|[ps] = -q\sigma, \quad |[qs] = p\sigma,$$

unter σ die Länge von s verstanden, so dass

(3) $$[a \mid q] = [b \mid p]$$

sein muss.

Man nehme a zur y-, b zur z-Axe, die auf beiden senkrechte zur x-Axe eines Coordinatensystems mit dem Ursprung 0, und nenne e_1, e_2, e_3 die auf den positiven Axen der x, y, z liegenden Einheitsstrecken. Dann sei

$$\begin{aligned} s &= ue_1 + ve_2 + we_3, \\ p &= u'e_1 + v'e_2 + w'e_3, \\ q &= u''e_1 + v''e_2 + w''e_3, \\ r &= xe_1 + ye_2 + ze_3. \end{aligned}$$

So wird die Bedingung (3)

(4) $$av'' = bw',$$

wenn wir mit a und b auch die Längen dieser Strecken bezeichnen. Die Gleichung (2) wird aber

$$\begin{aligned} (xv - yu)[e_1e_2] + (xw - zu)[e_1e_3] + (yw - zv)[e_2e_3] = \\ = u'[ae_1] + w'[ae_3] + u''[be_1] + v''[be_2], \end{aligned}$$

und diese zerfällt in

$$xv - yu = -u'a, \quad xw - uz = -u''b, \quad yw - zv = aw' - bv''.$$

Setzt man $y = 0$, so folgt

$$\frac{x}{a} = -\frac{u'}{v},$$

$$-z = \frac{aw' - bv''}{v},$$

oder, nach (4),

$$-z = \frac{w'}{av}(a^2 - b^2) = -\frac{v''}{bv}(b^2 - a^2).$$

Daher wird

$$\frac{1 - v'^2}{v^2} = \frac{u'^2 + w'^2}{v^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2a^2}{(a^2 - b^2)^2},$$

und weil

$$\frac{1 - v'^2}{v^2} = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{v''^2}{v^2} = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{z^2b^2}{(b^2 - a^2)^2}$$

ist, durch Gleichsetzung beider Werthe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Und ähnlich findet sich mit $z = 0$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{\sigma^2}.^{*)}$$

*) Dies sind die von Minding gefundenen Resultate. Vgl. dessen Handbuch der theoret. Mechanik (2. Theil des Handbuchs der Diff.- u. Int.-Rechn.) Seite 78 ff., bes. Seite 96 und Journ. f. Math. Bd. 14 Seite 289, Bd. 15 Seite 27. (A. d. H.)

Bemerkung des Herausgebers.

Im Vorstehenden sind zuerst die beiden einzigen Arbeiten abgedruckt, die Grassmann über Mechanik veröffentlicht hat, nämlich die elementare Darstellung, die im Programm des Stettiner Gymnasiums 1867 erschienen ist und die Arbeit aus dem 12. Band der Mathematischen Annalen, die 1877 gedruckt wurde. Die beiden Publikationen sind hier wörtlich wieder abgedruckt, nur Aeusserlichkeiten geändert und kleine Fehler korrigirt.

Erläuterungen und Bemerkungen, die ich zufügen zu sollen glaubte, sind hier, wie auch sonst überall, unter den Text gesetzt und durch ein angefügtes „A. d. H.“ als Anmerkungen des Herausgebers gekennzeichnet. Bei der ersten der beiden Abhandlungen habe ich hinter § 63 einen Zusatz eingeschaltet, der sich im Nachlass fand. Zur Erleichterung des Studiums habe ich einige Figuren beigegeben, die im Originale fehlen.

Die eben besprochenen beiden Abhandlungen enthalten neben den §§ 105 und 120—124 $\mathfrak{A}_1$, den Seiten 27—38 der „Geometrischen Analyse“ und den Anmerkungen zu den §§ 286 und 347 von $\mathfrak{A}_2$ Alles was Grassmann über Mechanik veröffentlicht hat.

Auch der Nachlass bietet — wider Erwarten — keine grosse Ausbeute. Er besteht der Hauptmasse nach aus Excerpten und Rechnungen zu Arbeiten anderer Mathematiker, in welchen öfter, soweit der Gegenstand es erlaubte, die Ausdehnungslehre benutzt ist. Der Rest enthält eigene Entwürfe und Versuche verschiedener Art.

Nach sorgfältiger Durchsicht aller Papiere habe ich zwölf Aufsätze zusammengestellt, welche geeignet sind die Anwendung der Ausdehnungslehre auf die Mechanik des Punktes und des festen Körpers zu zeigen und die zugleich Alles enthalten, was aus dem gesammten Nachlass mir als neu und interessant erschien. Die unter III, V, VI, VII abgedruckten Stücke und XII, von § 2, an lagen bis auf Kleinigkeiten druckfertig vor, XI wurde aus mehreren solchen Theilen zusammengesetzt. Dabei waren nur kleine Veränderungen und Zusätze im Texte nöthig, die in Klammern { } eingeschlossen sind, und einige Erläuterungen,

die in Anmerkungen stehen. Die Stücke IV, VIII, IX, XIII erforderten, theils um Wiederholungen von früher Gebrachtem zu vermeiden, theils weil die MSS. durch ihre Kürze schwer verständlich waren, grössere Aenderungen, die ebenfalls in Klammern gesetzt sind, wenn sie nur wenige Worte überschreiten. Die MSS. zu den Stücken X und XIV, sowie dem § 1 von XII konnten so, wie sie waren, nicht gedruckt werden und ich zog es in Folge dessen vor sie frei zu bearbeiten, wobei ich strebte mich möglichst an die MSS. anzuschliessen.

Die Bezeichnungen sind durchweg die, welche Grassmann in $\mathfrak{A}_2$ benutzt hat, auch dann, wenn in den MSS. andere Zeichen angewandt sind. Nur die eine Abweichung habe ich mir gestattet, dass ich das innere Produkt einer Strecke oder eines Flächenraumes mit sich selbst, also $[p \mid p]$ bezw. $[pq \mid pq]$ einfach mit p^2 oder $[pq]^2$ und nicht mit $p^{\underline{2}}$ oder $[p^{\underline{2}}]$ bezeichnet habe, wie dies auch Grassmann in dem Programme gethan hat.

Freiburg, Frühjahr 1893. **J. Lüroth.**

III. ABTHEILUNG.

MATHEMATISCHE PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL.

I. Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung.

Von

H. Grassmann.

Programm der Ottoschule in Stettin, März 1839.

§ 1. Krystallform und chemische Zusammensetzung als die wesentlichen Eigenschaften unorganischer Körper. 5

Unter allen Eigenschaften, welche das Wesen der unorganischen Körper bestimmen, sind die, welche dies Wesen am unmittelbarsten darstellen, die chemische Zusammensetzung und die Krystallform. Nur bei der chemischen Erzeugung und bei der Bildung der Krystallform zeigt sich ein eigenthümliches Leben in dem unorganischen Körper, während dieser, nachdem sich jene innere und äussere Gestaltung vollendet hat, als ein todter erscheint, der aber dennoch alle kosmischen Einflüsse nach der ihm durch jene Gestaltung mitgetheilten Eigenthümlichkeit verarbeitet. Beide Lebensäusserungen der unorganischen Natur entsprechen den beiden Lebensthätigkeiten der organischen Natur, nämlich der Bildung des Organismus und der Umwandlung (Assimilation) der Stoffe für das organische Leben. — Denn was für die organische Welt der Organismus ist, das ist für die unorganische die Krystallform, und was für die erstere die Assimilation ist, das ist für die letztere der chemische Process. — Krystallform und Organismus schliessen sich einander aus; denn beide bestimmen nicht bloss die äussere Umgränzung, sondern auch die innere Gestaltung des Körpers bis in seine kleinsten Theile hinein; und kein krystallisirter Körper kann daher ein organisirter sein, und umgekehrt kann kein organisirter Körper eine Krystallform haben. Eben so entschieden stellt sich der Gegensatz zwischen der Assimilation und dem chemischen Process heraus; was wir hier aber nicht weiter entwickeln können.

§ 2. Zufälliges und Wesentliches an dem einzelnen Krystall.

Betrachten wir irgend einen einzelnen Krystall, so muss uns zuerst die vollkommen ebene Begränzung auffallen, und wir werden sogleich auf den Gedanken geführt, dass jede Begränzungsebene durch irgend eine Kraft erzeugt sein muss, welche eine gegen die Ebene senkrechte Richtung hat. In der That finden wir, dass der Körper sich im Allgemeinen in jeder mit einer Begränzungsebene parallelen Richtung spalten lässt, und zwar in allen parallelen Ebenen mit gleicher Leichtigkeit; woraus wir also schliessen müssen, dass in der auf diesen Ebenen senkrechten Richtung die Kraft des Zusammenhanges geringer ist, als in den von der senkrechten abweichenden Richtungen; und jene Kraft, welche das Erscheinen der Begränzungsebene bedingte, muss daher durch den ganzen Krystall gleichmässig hindurchgehen, und ihre Wirkung muss in einer Verminderung des Zusammenhanges der Theile bestehen. Es geht hieraus sogleich hervor, dass jeder Krystallfläche eine mit ihr parallele zweite Begränzungsfläche entsprechen muss, 6 auch wenn die Fläche selbst durch † zufällige Umstände unterdrückt sein sollte. Auch erhellt, dass es nur auf den Winkel, welchen zwei Flächen bilden, ankommen kann, während die Entfernung der Fläche vom Mittelpunkte der Gestalt als etwas zufälliges und wechselndes erscheint.

Betrachten wir nun die verschiedenen Flächen eines und desselben Krystalls, so finden wir, dass manche ganz dieselben (physikalischen) Eigenschaften, insbesondere gleichen Glanz und gleiche Spaltbarkeit haben, während andere diese Eigenschaften in ungleichem Grade zeigen. — Alle Flächen nun, welche gleiche physikalische Eigenschaften zeigen, müssen wir ansehen als entstanden durch gleiche (gleich grosse und gleichartige) Kräfte, und umgekehrt müssen jede zwei gleiche Kräfte auch gleichartige Begränzungsflächen erzeugen. Hieraus folgt unmittelbar, dass je zwei parallele Begränzungsflächen gleiche Eigenschaften besitzen müssen, indem sie nur die entgegengesetzten Seiten derselben Kraft darstellen. Wir wollen solche nach entgegengesetzter Seite wirkende Kraft, wenn sie der ersteren gleich ist, kurz ihre Gegenkraft nennen. —

Oft finden wir nun Spaltungsrichtungen, welchen keine Begränzungsflächen entsprechen, indem die angränzenden Flächen diese gleichsam überwachsen haben; es ist also auch die wirkliche Erscheinung oder die Unterdrückung einer Begränzungsfläche nur als etwas zufälliges anzusehen, während das eigentlich Wesentliche die innere Struktur des Krystalles ist. In der That, vergleichen wir zwei Krystalle von übrigens ganz gleicher Beschaffenheit, so finden wir dennoch, dass oft an dem

einen Begränzungsflächen erscheinen, welche an dem andern nicht hervortreten, welche aber durch entsprechende Spaltungsrichtungen vertreten werden. Wir werden somit zwei Krystalle, welche dieselbe innere Struktur zeigen, als derselben Krystallart (Krystall-Species) angehörig anzusehen haben, wenn auch in der einen Begränzungsflächen erscheinen, welche in der andern nicht hervortreten. Aber das ist aus dem Obigen klar, dass jede zwei Krystalle derselben Art nicht bloss dieselben Spaltungsrichtungen haben werden, sondern dass auch jede Fläche des einen mit der entsprechenden des andern gleiche physikalische Eigenschaften (Glanz, Härte u. s. w.) zeigen werde, und dass je zwei Flächen des einen einen gleichen Winkel bilden werden, wie die entsprechenden Flächen des andern Krystalles.

Könnte man die innere Struktur des Krystalles unmittelbar untersuchen, so würde man seine äussere Umgränzung ganz bei Seite liegen lassen können; da dies aber nicht der Fall ist, auch die Spaltungsversuche nur selten oder nie zu erschöpfenden Resultaten führen, so muss man von der äusseren Umgränzung auf jene zurückschliessen, und zu dem Ende verschiedene Krystalle derselben Species untersuchen. Nun findet sich, dass im Allgemeinen alle Körper, welche aus denselben Bestandtheilen auf gleiche Weise zusammengesetzt sind, auch eine gleiche innere Krystallstruktur zeigen. Vergleicht man daher die Gesammtheit der Flächen, welche sich an allen Krystallen derselben Species zeigen, so wird man sich dadurch ein möglichst vollständiges Bild der Krystallspecies entwerfen können.

§ 3. **Naturgesetz der Krystallbildung.**

Vergleicht man die verschiedenen Flächen eines Krystalles oder einer Krystallspecies, so findet man stets das Gesetz bestätigt, „dass wenn darin zwei Kräfte von bekannter Richtung und Grösse als Flächen-bildend vorkommen, auch stets die aus jenen beiden gebildete mittlere Kraft als Flächen-bildend vorkommen könne“, wo man unter der mittleren Kraft die Diagonale des aus den † einzelnen Kräften beschriebenen Parallelogramms versteht.

Um den Sinn dieses Gesetzes klar zu machen, wollen wir zuerst an einem Krystalle zwei Flächen von gleicher physikalischer Beschaffenheit annehmen; wir werden alsdann schliessen können, dass die sie bildenden Kräfte gleich gross sind (§ 2); dadurch ist dann die Richtung der mittleren Kraft bestimmt; diese Kraft wird daher auch an dem Krystall als Flächen-bildend vorkommen müssen (also auch eine Begränzungsfläche hervorbringen können); eben darum wird sie aber nach demselben Gesetz sich mit einer der früheren zusammensetzen

können und eine neue mittlere Kraft bilden, und so würde es ohne Ende fortgehen, wenn nicht die Natur selbst sich eine Gränze gesetzt hätte, indem die Kräfte desto seltener Flächen-bildend werden, überhaupt desto weniger die innere Struktur des Krystalls bestimmen, je vielfacher die Zusammensetzung ist, durch welche sie entstanden sind.

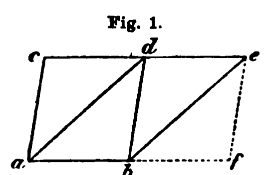
Nun frägt sich aber, wie das Gesetz anzuwenden ist, wenn die beiden Flächen ungleiche physikalische Eigenschaften haben, also auch durch ungleiche Kräfte erzeugt sind. Da man diese Kräfte, eben weil sie auch ihrer Art nach uns ganz verborgen sind, nicht messen kann, so muss man eben durch Anwendung jenes Gesetzes selbst zuerst auf das Verhältniss jener Kräfte geführt werden, um danach dann die Richtigkeit des Gesetzes weiter zu prüfen. Da nun mit dem wechselnden Verhältniss jener Kräfte auch die Richtung der mittleren Kraft wechselt, so muss auch umgekehrt durch die Richtung der mittleren Kraft das Verhältniss jener Kräfte bestimmt sein. Nimmt man also eine ihrer Richtung nach bekannte Kraft, welche zwischen den beiden ursprünglich gegebenen Kräften liegt, als die mittlere an, so ist dann das Verhältniss der ursprünglichen Kräfte bestimmt, und das Gesetz kann nun geprüft werden.

Noch haben wir hierbei zu bemerken, dass das Gesetz keinesweges etwas aussagen soll über das wirkliche Verhältniss der Kräfte, sondern nur insofern deren Richtungen dadurch bestimmt sind. Für die Grösse jener Kräfte hingegen haben wir keinen Maassstab, so dass wir auch nicht im Stande sind, für sie ein Gesetz aufzustellen. In der That reicht aber jenes Gesetz, auch in dieser Beschränktheit, schon hin, um dadurch die sämmtlichen Krystallgestalten ihrer Form nach zu entwickeln.

§ 4. Mathematische Erweiterung des Naturgesetzes.

Es ging aus dem eben aufgestellten Gesetz hervor, dass man die aus zwei Kräften des Krystalls gebildete mittlere Kraft wieder mit einer der einfachen Kräfte zusammensetzen und dadurch zu einer Kraft gelangen kann, welche ebenfalls Flächen-bildend sein muss. Zu dieser letzten Kraft würde man sogleich unmittelbar gelangt sein, wenn man die ursprüngliche Kraft, welche zweimal angewandt ist, doppelt genommen, und dann sogleich aus dieser doppelten und jener einfachen Kraft zusammengesetzt hätte. Es seien zum Beispiel *ab* und *ac* (Fig. 1) zwei Kräfte, *ad* ihre mittlere Kraft; konstruiert man nun aus *ad* und *ab* wieder die mittlere Kraft *ae*, so lehrt der blosse Anblick der Figur, dass man zu dieser Kraft *ae* auch unmittelbar gelangt sein

Fig. 1.



würde, wenn man die Kraft *ab*, welche zweimal angewandt ist, doppelt genommen, und diese doppelte Kraft *af* mit der einfachen Kraft *ac* zusammengesetzt hätte. Daraus ergiebt sich überhaupt, dass „wenn man von zwei gegebenen Kräften aus durch wiederholte Zusammensetzungen zu einer neuen Kraft † gelangt, man zu derselben Kraft auch unmittelbar durch einmalige Zusammensetzung gelangen würde, wenn man jede Kraft so viel mal nimmt, als sie bei jenen einzelnen Zusammensetzungen im Ganzen vorkommt". —

Geht man ferner von drei ursprünglichen Kräften aus, die nicht in einer Ebene liegen, und setzt zuerst zwei derselben zusammen, und die daraus gebildete mittlere Kraft wieder mit der dritten, so ist die so gebildete Kraft die Diagonale eines Spathes[*]), dessen Kanten den ursprünglichen Kräften gleich und parallel sind. Sind zum Beispiel *ab*, *ac* und *ad* (Fig. 2) drei ursprüngliche Kräfte, *ae* die mittlere Kraft zwischen *ab* und *ac*, *af* die mittlere zwischen *ae* und *ad*; so hat man nur durch die gegenüberstehenden Seiten der Parallelogramme (*aceb* und *aedf*) paarweise parallele Ebenen zu legen, um das Spath zu erhalten, dessen Diagonale *af* ist. Man nennt alsdann *af* die mittlere Kraft zwischen den drei Kräften *ab*, *ac* und *ad*. Hiernach kann man nun den soeben für zwei ursprüngliche Kräfte aufgestellten Satz auch auf drei Kräfte ausdehnen.

Fig. 2.

Hierbei ist nun noch zu bemerken, dass nach dem vorigen Paragraphen zu jeder Kraft eine ihr gleiche Gegenkraft gehört, und es wird also auch gestattet sein, diese Gegenkräfte unter sich oder mit den ersteren zusammenzusetzen; da nun gleiche entgegengesetzte Kräfte sich bei der Zusammensetzung gegenseitig aufheben, so hat man, um anzugeben, wie oft jede der drei gegebenen Kräfte vorkommt, die Gegenkräfte jedesmal in Abzug zu stellen.

Um hier durch eine einfache Bezeichnung die Betrachtung zu erleichtern, wollen wir künftig zum Beispiel unter (532) jede mittlere Kraft verstehen, welche zusammengesetzt ist aus dem fünffachen der ersten gegebenen Kraft, dem dreifachen der zweiten und dem zweifachen der dritten Kraft; so dass, wenn wir die verschiedenen derselben Krystallspecies angehörige Kräfte bezeichnen wollen, jede Zahl, die in solchen dreiziffrigen Ausdrücken auf derselben Stelle steht, sich auch auf dieselbe Kraft beziehen soll; soll die entgegengesetzte Kraft genommen werden, so bezeichnen wir die Zahl mit einem Strich. So

[*]) So nenne ich einen von drei Paaren paralleler Flächen begränzten Körper.

würde nun zum Beispiel die mittlere Kraft zwischen 531 und 4$\bar{2}$1 geben 912, weil die erste Kraft im Ganzen 9-mal, die zweite (3—2)-, das heisst 1-mal und die letzte 2-mal vorkommt. Wir nennen diese Zahlen selbst die Wiederholungszeiger oder kurz die Zeiger. Die ursprünglichen Kräfte selbst würden hiernach mit 100, 010, 001 bezeichnet werden müssen. —

Hiernach würde sich nun das im vorigen Paragraphen aufgestellte Naturgesetz so erweitern: „Wenn an einem Krystall drei Kräfte als Flächen-bildend vorkommen, so muss auch jede andere Kraft, welche aus den Vielfachen jener Kräfte selbst oder ihrer Gegenkräfte zusammengesetzt ist, als Flächen-bildend vorkommen können".

So würde man eine unendliche Anzahl von Kräften erhalten, wobei wir uns aber erinnern müssen, dass diese Kräfte um so untergeordneter sind, je zusammengesetzter sie werden; und um hier eine festere Gränze zu gewinnen, bemerken wir, dass die Natur bei der Bildung jener zusammengesetzten Kräfte selten die Zahl 7 überschreitet. Auch ist klar, dass, wenn für zwei Kräfte das Verhältniss der Wiederholungszeiger dasselbe ist, zum Beispiel 321 und 642, auch beide Kräfte dieselbe Richtung haben werden, und da das Gesetz des vorigen Paragraphen nur die Richtung der Kräfte bestimmt, nicht ihre Grösse, so haben wir hier also nur auf das Verhältniss der Wiederholungszeiger Rücksicht zu nehmen, indem alle durch die obige Ableitung erhaltenen Kräfte, in denen das Verhältniss jener Zeiger dasselbe ist, nur ein und dieselbe in dem Krystall wirksame Kraft darstellen. —

9 ## § 5. Auswahl der ursprünglichen Kräfte.

Es leuchtet ein, dass weder durch die Annahme einer ursprünglichen Kraft, noch durch die Annahme zweier, der Krystall allseitig bestimmt ist; denn die zusammengesetzten Kräfte, welche aus zwei ursprünglichen Kräften und ihren Gegenkräften abgeleitet werden können, liegen alle in einer Ebene, und würden den Krystall nur nach den Richtungen dieser Ebene bestimmen; damit derselbe also allseitig bestimmt sei, sind drei ursprüngliche Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen, erforderlich.

Ist nun durch drei ursprüngliche Kräfte eine Reihe von abgeleiteten Kräften bestimmt, so wird man zu derselben Reihe von Kräften gelangen können, wenn man drei beliebige von den abgeleiteten Kräften, die nicht in einer Ebene liegen, als ursprüngliche auswählt und aus ihnen zusammensetzt, nur dass alsdann natürlich die Wiederholungszeiger ganz andere werden. Wollte man zum Beispiel die Kräfte (321), (531) und (421) als die ursprünglichen ansehen und daraus die Kraft

432 ableiten, so hätte man nur das Dreifache der ersten Kraft (321) mit der entgegengesetzten von der zweiten (531) zu verbinden*). Es wird also bei einer gegebenen Krystallspecies möglich sein, drei beliebige Kräfte (deren Verhältniss man durch die Richtung zweier abgeleiteter Kräfte bestimmt) als die ursprünglichen anzusehen, nur dass man bei der einen Annahme einfachere Zahlverhältnisse erhält als bei der andern. Auch muss man hier besonders darauf achten, dass, wenn gleiche Kräfte auftreten, diese auch schon durch die Art ihrer Zusammensetzung als gleich erscheinen müssen.

Es frägt sich nun noch, ob man auch mehr als drei Kräfte als ursprüngliche ansehen könne. Nehme ich aber vier von einander unabhängige Kräfte an, das heisst so, dass die vierte nicht durch Zusammensetzung aus den übrigen erhalten werden kann, so würde durch je drei von ihnen der Krystall überall anders bestimmt sein; es würde also überall ein Widerstreit entstehen. In der That finden wir stets in der Natur nur drei ursprüngliche Kräfte als den Krystall bestimmend.

§ 6. Gleichwerthige Träger.

Um nun die unendliche Menge der Gestalten, welche sich nach dem obigen Gesetze (§ 3 und 4) entwickeln, zu übersehen, so fassen wir die Gesammtheit aller vollkommen gleichartigen Flächen einer Krystallspecies jedesmal zu einer einzigen Gestalt zusammen, und nennen sie eine einfache Gestalt; so dass also jeder Krystall, welcher ungleichartige Flächen darbietet, anzusehen ist als zusammengesetzt aus so vielen einfachen Gestalten, als er verschiedene Arten von Flächen darbietet; und es wird hier also zunächst nur darauf ankommen, diese einfachen Gestalten darzustellen.

Jede einfache Gestalt wird nun nach dem eben Gesagten durch Kräfte bestimmt sein, welche einander vollkommen gleich sind. Es werden aber nur diejenigen Kräfte als vollkommen † gleich angesehen werden können, welche aus gleichen Elementarkräften, die auch gleiche Lage gegen einander haben, auf dieselbe Weise durch Zusammensetzung entstanden sind. 10

Um diese Betrachtung rein in das geometrische Gebiet hinüberzuziehen, wollen wir statt der Flächen-bildenden Kräfte Flächen-tragende

---

*) Sollen überhaupt die Kräfte ($\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$), ($\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{g}$), ($\mathfrak{h}\mathfrak{i}\mathfrak{k}$) als die ursprünglichen angesehen und daraus die Kraft ($\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$) abgeleitet werden, so hat man, um die Zeiger x, y, z zu finden, durch die man aus jenen drei Kräften die gegebene Kraft ($\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}$) ableiten kann, folgende drei Gleichungen:

$$\mathfrak{b}x + \mathfrak{e}y + \mathfrak{h}z = \mathfrak{l}, \quad \mathfrak{c}x + \mathfrak{f}y + \mathfrak{i}z = \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{d}x + \mathfrak{g}y + \mathfrak{k}z = \mathfrak{n}.$$

Linien einführen, das heisst solche Linien, welche auf den zugehörigen Ebenen senkrecht stehen. Wir nennen diese Linien die Träger ihrer Ebenen; die Träger, welche einer einfachen Gestalt angehören, nennen wir gleichwerthig, und denken sie uns für ein und dieselbe einfache Gestalt gleich lang. Die sechs Träger, welche den drei Elementarkräften und ihren Gegenkräften entsprechen, nennen wir Elementarträger; und je zwei entgegengesetzte zusammengenommen nennen wir eine Elementar-Axe oder kurz Axe, und den Verein der drei Axen das Axenkreuz. Da die gleichwerthigen Träger immer den vollkommen gleichen Kräften entsprechen, so gilt das, was von diesen gesagt wurde, auch von jenen, dass zwei Träger nur dann als gleichwerthig angesehen werden können, wenn die drei Elementarträger, aus denen sie auf gleiche Weise durch Zusammensetzung entstanden sind, sich nur dem Orte nach, nicht ihrer Grösse und gegenseitigen Lage nach, unterscheiden. Die erste Bedingung ist also gleiche Art der Zusammensetzung, das heisst Gleichheit der Zeiger; so würde zum Beispiel der Träger (531) mit dem Träger (315̍) oder (15̍3̍) u. s. w. gleiche Art der Zusammensetzung haben, indem die Wiederholungszahlen gleich sind, und sich nur jedesmal auf drei andere von den sechs Elementarkräften beziehen. —

Daraus folgt, dass es im Allgemeinen (wenn nämlich nicht mehre Träger zusammenfallen) 48 Träger geben muss, welche auf gleiche Weise zusammengesetzt sind. Nämlich sind unter den Buchstaben 𝔟, c, 𝔡 die Wiederholungszeiger verstanden, so sind in dem Sinne des § 4 die 48 Träger folgende:

𝔟c𝔡	𝔟c𝔡̍	𝔟c̍𝔡	𝔟c̍𝔡̍	𝔟̍c𝔡	𝔟̍c𝔡̍	𝔟̍c̍𝔡	𝔟̍c̍𝔡̍
𝔟𝔡c	𝔟𝔡c̍	𝔟𝔡̍c	𝔟𝔡̍c̍	𝔟̍𝔡c	𝔟̍𝔡c̍	𝔟̍𝔡̍c	𝔟̍𝔡̍c̍
c𝔟𝔡	c𝔟𝔡̍	c𝔟̍𝔡	c𝔟̍𝔡̍	c̍𝔟𝔡	c̍𝔟𝔡̍	c̍𝔟̍𝔡	c̍𝔟̍𝔡̍
c𝔡𝔟	c𝔡𝔟̍	c𝔡̍𝔟	c𝔡̍𝔟̍	c̍𝔡𝔟	c̍𝔡𝔟̍	c̍𝔡̍𝔟	c̍𝔡̍𝔟̍
𝔡𝔟c	𝔡𝔟c̍	𝔡𝔟̍c	𝔡𝔟̍c̍	𝔡̍𝔟c	𝔡̍𝔟c̍	𝔡̍𝔟̍c	𝔡̍𝔟̍c̍
𝔡c𝔟	𝔡c𝔟̍	𝔡c̍𝔟	𝔡c̍𝔟̍	𝔡̍c𝔟	𝔡̍c𝔟̍	𝔡̍c̍𝔟	𝔡̍c̍𝔟̍
· · ·	· · ǀ	· ǀ ·	· ǀ ǀ	ǀ · ·	ǀ · ǀ	ǀ ǀ ·	ǀ ǀ ǀ

Die unter den Kolumnen gesetzten Punkte und Striche drücken die Stellung der Striche für jede Kolumne aus, indem die Punkte die Stellen, wo kein Strich ist, bezeichnen sollen. Wir erinnern hierbei noch einmal daran, dass die Zahl (die Buchstaben sind hier eben nur Zeichen für beliebige Zahlen), welche in diesen Ausdrücken für die

Träger auf derselben Stelle steht (zum Beispiel auf der ersten), sich immer auf denselben Elementarträger, oder wenn ein Strich darüber gesetzt ist, auf den entgegengesetzten bezieht; und wir wollen künftig den Elementarträger, auf den sich jedesmal die an der ersten Stelle stehende Zahl bezieht, mit b bezeichnen, den der zweiten Stelle entsprechenden mit c, den dritten mit d, so dass zum Beispiel $(\bar{5}\bar{3}2)$ den Träger bedeutet, welcher aus dem fünffachen von $\bar{b}$, dem dreifachen von $\bar{c}$ und dem zweifachen von d zusammengesetzt ist.

Damit aber zwei Träger gleichwerthig sind, muss ausser der Bedingung, dass die Art der Zusammensetzung † gleich ist, noch die zweite Bedingung erfüllt werden, dass die drei Elementarträger, aus welchen der eine entstanden ist, mit den entsprechenden Elementarträgern, aus welchen der andere auf gleiche Weise entstanden ist, gleiche Grösse und gleiche gegenseitige Lage haben müssen (wobei die gegenseitige Lage zweier Träger durch den Winkel, den sie einschliessen, bestimmt ist), so zum Beispiel ist der Träger (321) aus den Elementarträgern b, c, d ebenso entstanden wie zum Beispiel der Träger $(\bar{3}12)$ aus den Elementarträgern $\bar{b}$, d, c. Denn indem der erstere aus dem dreifachen von b, dem zweifachen von c und dem einfachen Träger d zusammengesetzt ist, so ist der letztere aus dem dreifachen von $\bar{b}$, dem zweifachen von d und dem einfachen Träger c zusammengesetzt. Damit also jene Träger gleichwerthig sind, muss c gleich d sein, der Winkel zwischen b und c gleich dem zwischen $\bar{b}$ und d, und der zwischen b und d gleich dem zwischen $\bar{b}$ und c (was mit dem vorigen zusammenfällt, da diese letzteren Winkel nur die Nebenwinkel der ersten sind).

Uebrigens kann man auch, wenn das Axenkreuz gegeben ist, zu jedem Träger sämmtliche gleichwerthige auf folgende Art finden: Man nimmt zu dem gegebenen Träger den entgegengesetzten hinzu, und bringt nach und nach das Axenkreuz mit jenem Träger-Paar in alle Lagen, welche in der Art möglich sind, dass jede spätere jede frühere vollkommen deckt, so haben jene beiden Träger nach und nach alle Lagen der mit ihnen gleichwerthigen Träger angenommen.

§ 7. Die Krystallsysteme.

Welche von den 48 gleichzusammengesetzten Trägern in der That gleichwerthig werden, hängt also nach dem vorigen Paragraphen von dem Verhältniss und der gegenseitigen Lage der Elementaraxen ab, welche die Krystallspecies bestimmen. In der That gelangen wir durch

diese Betrachtung zu einem Mittel, die unendliche Mannigfaltigkeit der Krystallspecies unter gewisse Gruppen oder Systeme zu ordnen; und fassen wir alle Krystallspecies, welche dieselbe Reihe von einfachen Gestalten geben, die sich nur durch ihre Abmessungen, nicht durch die Anzahl ihrer Flächen, Kanten u. s. w. unterscheiden, in ein System zusammen, so lässt sich leicht zeigen, dass es nothwendig sechs, aber auch nur sechs Krystallsysteme geben muss.

Es ergiebt sich nämlich zuerst, dass hiernach, wenn für zwei Krystallspecies aus den 48 Trägern dieselbe Reihe von gleichwerthigen Trägern sich aussondert, auch beide Species einem System angehören müssen; weil dann die einfachen Gestalten beider Species sich nur noch nach ihren Abmessungen unterscheiden. Es können nun die sämmtlichen 48 Träger von gleicher Zusammensetzung auseinander dadurch abgeleitet werden, dass man einestheils nach einander je zwei Zeiger umtauscht (zum Beispiel aus *bcd* macht *cbd*), anderntheils dass man nach und nach statt jedes Zeigers den entgegengesetzten setzt; und es fragt sich, wie die Elementarträger beschaffen sein müssen, damit in dem einen oder andern Falle gleichwerthige Träger entstehen.

Soll nun zuerst zum Beispiel der Träger (531) gleichwerthig sein mit (351), so muss, da der erstere aus den Elementarträgern b, c, d eben so entstanden ist, wie der letztere aus den Elementarträgern c, b, d, zuerst $b = c$ sein, und ferner der Winkel zwischen b und d eben so gross als der zwischen b und c, was man am leichtesten übersieht, wenn man die Elementarträger, welche denselben Zeiger in beiden Ausdrücken haben, unter einander schreibt: also

$$\begin{matrix} b\ c\ d \\ c\ b\ d, \end{matrix}$$

wo dann je zwei untereinanderstehende Elementarträger sich entsprechen.
12 Oder überhaupt † sollen zwei Träger, welche sich nur durch die Vertauschung zweier Elementarträger unterscheiden, gleichwerthig sein, so müssen diese beiden Elementarträger gleich sein, und mit dem dritten gleiche Winkel bilden. —

Ferner soll zum Beispiel der Träger (531) gleichwerthig sein mit $(53\overset{|}{1})$, so muss, da der erstere aus b, c und d ebenso entstanden ist, wie der letztere aus b, c und $\overset{|}{d}$, der Winkel zwischen b und d gleich sein dem zwischen b und $\overset{|}{d}$, und ebenso der zwischen c und d gleich dem zwischen c und $\overset{|}{d}$, was nur der Fall ist, wenn b und c senkrecht stehen auf d; überhaupt also, sollen zwei Träger, welche sich nur dadurch unterscheiden, dass ein Elementarträger in beiden entgegengesetzt

genommen ist, gleichwerthig sein, so muss dieser Elementarträger auf den beiden andern zugleich senkrecht stehen. —

Fassen wir dies beides zusammen, so ergiebt sich also, dass die Gleichheit zweier Elementaraxen nur dann gleichwerthige Träger bedingt, wenn beide zugleich gegen die dritte gleiche Winkel bilden, und dass umgekehrt die Gleichheit der Winkel nur dann gleichwerthige Träger hervorruft, wenn die beiden Axen, welche gegen die dritte gleiche Winkel bilden, unter sich gleich sind, und dass ebenso der senkrechte Stand der Elementaraxen nur dann zu gleichwerthigen Trägern führt, wenn zwei zugleich auf der dritten senkrecht stehen.

§ 8. Uebersicht der sechs Krystallsysteme.

Hiernach ergeben sich nun leicht die sechs Krystallsysteme, welche wir nach der halben Anzahl der gleichwerthigen Träger, oder was dasselbe ist, nach der Zahl der Lagen, in welchen das Axenkreuz sich decken kann, benennen:

1) Wenn alle drei Elementaraxen senkrecht auf einander stehen und gleich sind. Alsdann sind alle 48 Träger gleichwerthig. Das System heisst das regelmässige und umfasst nur eine Krystallspecies. Bringt man das Axenkreuz in verschiedene Lagen, so ergiebt sich, dass es 24 verschiedene Lagen giebt, von denen jede spätere die frühere deckt; denn zuerst kann man jeden der sechs Träger nach oben bringen, und dann jeden der vier wagrechten Träger zum Beispiel nach rechts; was also 24 sich gegenseitig deckende Lagen giebt; wir nennen dies System daher auch das 24-zählige.
2) Wenn alle drei Axen senkrecht gegeneinander sind, und zwei (zum Beispiel c und d) unter einander gleich, die dritte aber verschieden. Das Axenkreuz giebt dann acht sich gegenseitig deckende Lagen; das System heisst daher das achtzählige.
3) Wenn alle drei Axen senkrecht gegeneinander sind und ungleich: das vierzählige System.
4) Wenn eine Axe senkrecht gegen die beiden andern ist, während diese unter einander einen schiefen Winkel bilden. Hierbei können nun noch die Axen gleich oder ungleich sein. Aber nach § 7 bedingt die Gleichheit der Axen nur dann gleichwerthige Träger, wenn die gleichen Axen gegen die dritte gleiche Winkel bilden; also kann auch hier nur die Gleichheit der beiden Axen, welche gegen die dritte senkrecht sind, unter sich also schiefe Winkel bilden, in Betracht kommen. Nimmt man diese gleich an, so lässt das so gebildete Axenkreuz ebenfalls, wie das vorige, vier

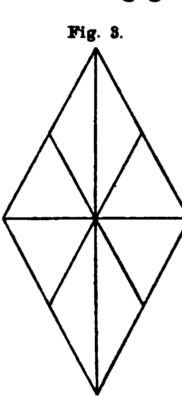
sich gegenseitig deckende Lagen zu. In der That sehen wir, dass, wenn wir aus den gleichen Axen (wie in Fig. 3) die mittleren Träger bilden, wir ganz das Axenkreuz des vorigen Systems erhalten, und somit fällt dies System mit dem † vorigen ganz zusammen. — Sind die Axen hingegen ungleich, so gelangen wir zum zweizähligen System.

13

Wir müssen nun den senkrechten Stand verlassen, da nach § 7 ein senkrechter Winkel keine gleichwerthigen Träger hervorruft.

5) Sind drei Elementarträger unter gleichen (aber nicht rechten) Winkeln gegeneinander geneigt und gleich gross, so erhält man das sechszählige System. Da nun nach § 7 die Gleichheit der Winkel ohne Gleichheit der beiden Axen, welche gleiche Winkel mit der dritten bilden, keine gleichwerthigen Träger bedingt, so kommt man sogleich zu dem Fall, wo zwei Axen gegen die dritte gleiche Winkel bilden und untereinander gleich sind. Das so gebildete Axenkreuz bietet wieder zwei sich deckende Lagen dar, und verwandelt sich, wenn man wieder (wie in Fig. 3) statt der beiden gleichen Axen die daraus gebildeten mittleren Träger zu Elementarträgern wählt, in das Krystallsystem Nr. 4.

Fig. 3.

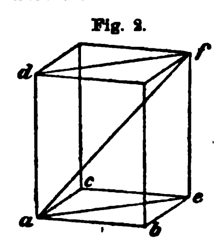


6) Nun lässt sich keine gleiche Beziehung mehr festhalten, welche gleichwerthige Träger hervorriefe; man gelangt somit sogleich zum einzähligen oder unregelmässigen Systeme, was alle übrigbleibenden Axenverhältnisse in sich schliesst. Von den 48 Trägern bleiben nur je zwei entgegengesetzte als gleichwerthig übrig.

§ 9. Hülfssätze zur Konstruktion der Krystallgestalten.

1) Nennt man die Stücke der drei Axen, welche in ihrer Zusammensetzung (in dem Sinne von § 4) einen bestimmten Träger geben, die Richtstücke (Koordinaten)*) desselben, so kann man folgenden Satz aufstellen:

Fig. 2.

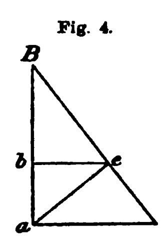


Bei senkrechten Axen verhalten sich die Axenabschnitte einer getragenen Ebene umgekehrt wie die Richtstücke des Trägers; das heisst, wenn die Richtstücke sich zum Beipiel wie 3 : 4 : 5 verhalten,

*) So sind zum Beispiel in Fig. 2 *ac*, *ad* und *ab* die Richtstücke des Trägers *af*.

so verhalten sich die entsprechenden Axenstücke, welche durch die getragene Ebene abgeschnitten werden, wie $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich leicht, wenn man durch eine Richtaxe und den Träger eine Hülfsebene legt. Es sei zum Beispiel aBe in Fig. 4 eine solche Ebene, ae der Träger, Be diejenige Linie in der getragenen Ebene, welche zugleich in die Hülfsebene fällt, aB ein Axenabschnitt, ab das entsprechende Richtstück; das Dreieck aeB ist bei e rechtwinklig, da der Träger ae auf der ganzen getragenen Ebene, also auch auf Be senkrecht steht; und ebenso ist, da die Axen gegeneinander senkrecht sind, eb senkrecht auf Ba; also ist nach einem bekannten Satz der Geometrie ae die mittlere Proportionale zwischen ab und aB; das heisst also der Träger ist die mittlere Proportionale zwischen jedem Axenabschnitt und dem entsprechenden Richtstück, woraus unmittelbar die Richtigkeit des Satzes folgt.

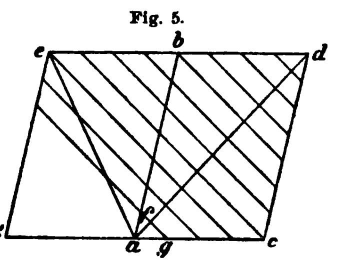
Fig. 4.



2) Eine Linie oder Ebene, welche von zwei Trägern Theile abschneidet, deren Theilzahlen*) gegeben sind, schneidet von dem mittleren Träger einen Theil ab, dessen Theilzahl die Summe der beiden gegebenen ist; ist aber statt des einen getheilten Trägers sein Gegenträger † zur Bildung des mittlern Trägers angewandt, so hat man die ihm entsprechende Theilzahl abzuziehen statt zuzuaddiren; das heisst also, wenn von den Elementarträgern die Theile $1 : \mathfrak{b}$ und $1 : \mathfrak{c}$ abgeschnitten werden, so wird von dem Träger (11) der Theil $1 : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$, von dem Träger $(1\overset{|}{1})$ der Theil $1 : (\mathfrak{b} - \mathfrak{c})$ abgeschnitten.

So zum Beispiel schneidet in Fig. 5 die Linie fg von ac $\frac{1}{4}$ ab, von ab $\frac{1}{7}$; es ergiebt sich leicht, dass sie wirklich von ad $\frac{1}{7+4}$, das heisst $\frac{1}{11}$ abschneidet. Theilt man in der That ab in 7 gleiche Theile, und zieht von den Theilungspunkten die Parallelen mit fg, so muss die vierte Parallele gerade in den Punkt c treffen (da ag $\frac{1}{4}$ von ac ist, und die Parallelen von jeder Linie immer gleiche Theile abschneiden); nachdem man endlich die Parallele von b aus gezogen hat, sind von cd $\frac{3}{7}$ abgeschnitten, es bleiben also noch $\frac{4}{7}$; theilt man daher den übrigbleibenden Theil der Linie cd noch in vier gleiche Theile und zieht die Parallelen, so ist es klar, dass ad

Fig. 5.



*) Unter der einem Theile zugehörigen Theilzahl verstehen wir die Zahl, welche ausdrückt, wie oft der Theil in dem Ganzen enthalten ist.

durch die sämmtlichen Parallelen in 11 gleiche Theile getheilt ist. Ebenso folgt leicht, dass der Träger *ae* oder $1\overset{|}{1}$ in 7 — 4, das heisst in drei gleiche Theile getheilt ist.

Nimmt man nun einen dritten Elementarträger an, von welchem durch dieselbe Ebene das Stück $1:\mathfrak{d}$ abgeschnitten wird, so leuchtet ein, wenn man nur den eben erwiesenen Satz noch einmal anwendet, dass von dem mittleren Träger zwischen jenen drei Elementarträgern das Stück $1:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$ abgeschnitten wird. *Es lässt sich also der Satz wörtlich ebenso auch für drei Elementarträger aussprechen.*

Wollte man wissen, den wie vielten Theil die Ebene zum Beispiel von einem Träger $(1\overset{|}{1}\overset{|}{1})$ abschneidet, so findet man durch Anwendung desselben Gesetzes den Theil $1:(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d})$.

§ 10. Konstruktion der Gestalten des regelmässigen Systems.

Im regelmässigen System sind alle 48 Träger, welche gleiche Zusammensetzung haben, auch gleichwerthig. Um die dadurch entstehende Gestalt konstruiren zu können, haben wir zunächst die Entfernung gewisser ausgezeichneter Punkte der Oberfläche zu suchen. Als ausgezeichnete Punkte der Oberfläche heben wir die hervor, worin die Elementarträger (Hauptträger) die Oberfläche des Körpers treffen und nennen sie Hauptpunkte; ferner die, worin die zwischen zwei Elementarträgern liegenden mittleren Träger (Zwischenträger) die Oberfläche treffen und nennen sie Zwischenpunkte; und endlich nennen wir Aussenpunkte die Punkte, worin die zwischen drei Elementarträgern liegenden mittleren Träger (Aussenträger) die Oberfläche treffen. Nennen wir nun die Linien vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche überhaupt Radien, so ergiebt sich von selbst, was wir unter Hauptradien, Zwischenradien und Aussenradien verstehen. Die Grösse dieser Radien ist nun zuerst zu suchen.

Es ist im vorigen Paragraphen dargethan, dass die Axenabschnitte der getragenen Ebenen sich umgekehrt verhalten wie die entsprechenden Richtstücke der Träger; da nun im regelmässigen System die Elementarträger gleich sind, so verhalten sich die Richtstücke eines zusammengesetzten Trägers wie die Zeiger desselben, also die Axenabschnitte umgekehrt; also wenn die Zeiger für alle 48 Träger $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ sind, so werden die Axenabschnitte sich verhalten wie $1/\mathfrak{b}:1/\mathfrak{c}:1/\mathfrak{d}$; jeder Elementarträger (Hauptträger) kann daher von den 48 getragenen Ebenen nur in drei Punkten geschnitten werden, deren Entfernungen sich wie $1/\mathfrak{b}:1/\mathfrak{c}:1/\mathfrak{d}$ verhalten. Da wir nun die Träger † so gross oder so klein annehmen können, als wir wollen, wenn wir sie nur alle einander gleich annehmen, so ist klar, dass wir sie auch so klein an-

nehmen können, dass jene Schnitte wirklich von dem Hauptträger die Theile $1/\mathfrak{b} : 1/\mathfrak{c} : 1/\mathfrak{d}$ abschneiden. —

Alsdann schneiden die getragenen Ebenen von jedem Zwischenträger solche Theile ab, deren Theilzahlen die Summen und Unterschiede aus je zweien der Zeiger sind; nämlich werden die beiden Elementarträger, zwischen denen der Zwischenträger liegt, selbst von den Ebenen getroffen, so sind die Theilzahlen nach dem zweiten Hülfssatze die Summen der Zeiger; wird aber nur der eine der Elementarträger von den Ebenen geschnitten, während sie von dem andern den entgegengesetzten Träger treffen, so werden nach demselben Satze die Theilzahlen den Unterschieden gleich sein. Es wird also im Allgemeinen sechs solcher Schnittpunkte auf jedem Zwischenträger geben (wenn nicht einige davon zusammenfallen). Endlich wird der Aussenträger in vier Punkten geschnitten, deren Theilzahlen der Summe der drei Zeiger und den Ueberschüssen je zweier Zeiger über den dritten gleich sind. Die erstere Theilzahl findet nach dem dritten Hülfssatze statt, wenn die Ebene die drei Elementarträger selbst schneidet, zwischen denen der Aussenträger liegt; hingegen die letzteren, wenn sie einen (oder auch zwei) derselben nur in ihrer entgegengesetzten Richtung schneidet.

Um nun zu wissen, welche von diesen Punkten überall wirklich Punkte der Oberfläche bilden, haben wir noch eine Unbestimmtheit aufzuheben, welche bei der Konstruktion einer Gestalt, wenn die Träger gegeben sind, statt findet. Wenn sich nämlich zwei getragene Ebenen schneiden, so entstehen vier an einer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie liegende Winkel, von denen wir den nach dem Mittelpunkt sich öffnenden Winkel den erhobenen Winkel, den nach der entgegengesetzten Seite liegenden den vertieften Winkel nennen können. Setzen wir nun fest, dass man die getragenen Ebenen nie so verbinden soll, dass vertiefte Winkel entstehen, so ist jetzt die Art der Begränzung genau bestimmt. Bei jedem vertieften Winkel wird offenbar die Erweiterung jeder Fläche, die ihn bilden hilft, in das Innere des Körpers gehen, was bei erhobenen Winkeln nie der Fall sein kann.

Daraus folgt sogleich, dass von all den Punkten, worin ein vom Mittelpunkt ausgehender Strahl von den Ebenen der Gestalt geschnitten wird, immer nur derjenige ein Punkt in der Oberfläche sein kann, welcher dem Mittelpunkt zunächst liegt, indem in jedem andern Fall Ebenen ins Innere der Gestalt hineingehen, also vertiefte Kanten vorkommen würden. Ist also $\mathfrak{b}$ der grösste und $\mathfrak{d}$ der kleinste Zeiger, so ergiebt sich, dass von den drei Punkten auf dem Hauptträger, der, welcher um $1 : \mathfrak{b}$ von dem Mittelpunkte entfernt liegt, ein Punkt der

Oberfläche oder ein Hauptpunkt sein wird, was wir auch so ausdrücken können, dass der Hauptradius $1:\mathfrak{b}$ vom Hauptträger ist; ebenso ergiebt sich, dass der Zwischenradius $1:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ vom Zwischenträger, und der Aussenradius $1:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$ vom Aussenträger ist, alles für den Fall, dass die Träger so klein angenommen sind, wie es oben vorausgesetzt wurde.

In jedem Hauptpunkt (h) stossen nothwendig acht Flächen zusammen, nämlich alle die, worin der Elementarträger, in welchem der Hauptpunkt liegt, den Zeiger $\mathfrak{b}$ hat (denn nur von diesen Flächen wird jener Träger in der Entfernung $1:\mathfrak{b}$ geschnitten)*); da ferner von dem [16] Zwischenträger der Theil † $1:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ abgeschnitten wird, so stossen in jedem Zwischenpunkt (z) die Flächen zusammen, wo die Elementarträger, zwischen denen jener Zwischenträger liegt, die Zeiger $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ haben. Deren giebt es aber vier; zum Beispiel in dem Zwischenpunkt, der dem Träger 110 angehört, stossen zusammen die Flächen:

$$\mathfrak{bcd},\ \mathfrak{bc}\overset{|}{\mathfrak{d}},\ \mathfrak{cbd},\ \mathfrak{cb}\overset{|}{\mathfrak{d}}.$$

Endlich in jedem Aussenpunkte stossen alle sechs Flächen zusammen, welche die Elementarträger schneiden, zwischen denen er liegt, zum Beispiel in dem Aussenpunkt (a), der zum Träger 111 gehört, stossen die Flächen

$$\mathfrak{bcd},\ \mathfrak{bdc},\ \mathfrak{cbd},\ \mathfrak{cdb},\ \mathfrak{dbc},\ \mathfrak{dcb}$$

zusammen. Diese Punkte bilden also die Eckpunkte des gesuchten Körpers.

Suchen wir die Kanten der ihn begränzenden Figuren, so werden wir nur je zwei Flächen aufzusuchen haben, welche durch zwei solche Punkte zugleich gehen. Unter den oben aufgezählten Flächen, welche in h zusammenstossen, finden wir nun zwei, die auch in z zusammenstossen, nämlich $\mathfrak{bcd}$ und $\mathfrak{bc}\overset{|}{\mathfrak{d}}$. Diese beiden Flächen bilden also eine Kante hz; und überhaupt wird jede Kante hz von zwei solchen Flächen gebildet, die sich nur dadurch unterscheiden, dass der kleinste Zeiger entgegengesetzt genommen ist; ebenso werden in ha zwei solche Flächen zusammenstossen, die sich nur durch die Vertauschung der beiden kleinsten Zeiger, und in za, die sich durch die Vertauschung der beiden grössten Zeiger unterscheiden**).

---

*) Zum Beispiel in dem Hauptpunkte, welcher dem Träger (100) angehört, stossen die Flächen:

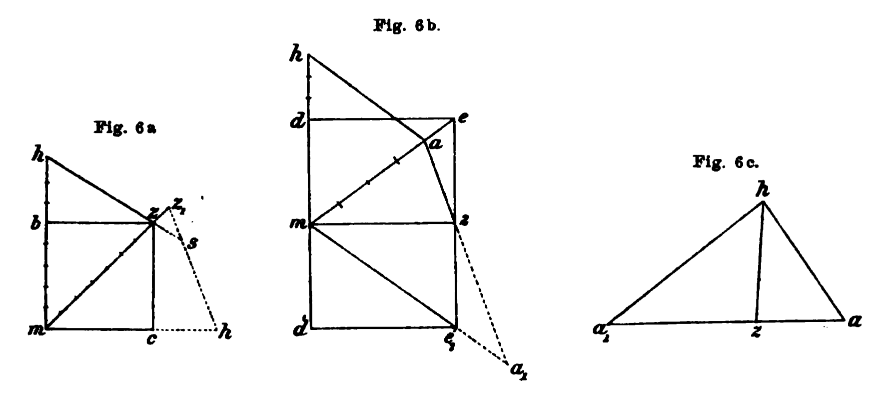
$$\mathfrak{bcd},\ \mathfrak{bc}\overset{|}{\mathfrak{d}},\ \mathfrak{b}\overset{|}{\mathfrak{c}}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\overset{|}{\mathfrak{c}}\overset{|}{\mathfrak{d}},\ \mathfrak{bdc},\ \mathfrak{bd}\overset{|}{\mathfrak{c}},\ \mathfrak{b}\overset{|}{\mathfrak{d}}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}\overset{|}{\mathfrak{d}}\overset{|}{\mathfrak{c}}$$

zusammen.

**) Alle diese Verhältnisse stellt Fig. 11 anschaulich dar.



Die Figuren, welche den Körper umgränzen, sind daher Dreiecke, von denen jedes zwischen drei Punkten *h*, *a* und *z* liegt. Die Konstruktion eines solchen Dreiecks hat nun keine Schwierigkeit mehr, sobald die Zeiger gegeben sind. Es seien die Zeiger zum Beispiel 5, 3, 2; so sind die Entfernungen der Eckpunkte in dem oben angegebenen Sinne $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, welche man aber, da es nur auf das Verhältniss ankommt, mit einer beliebigen Zahl (wenn nur alle mit derselben) multipliciren kann. Für die Uebersicht der verschiedenen Gestalten des regelmässigen Systems erscheint es am bequemsten, ihnen allen einen gleichen Zwischenradius zu geben, wir machen diesen daher dem



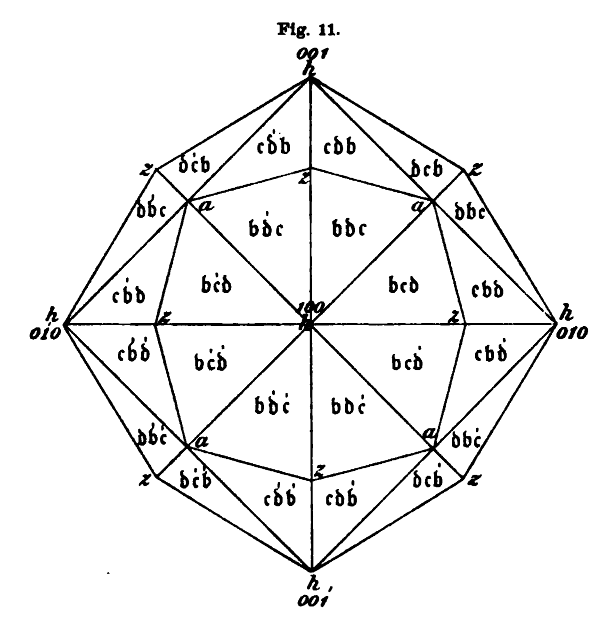
Zwischenträger gleich und multipliciren daher jene Brüche mit 8, so wird also der Hauptradius $\frac{8}{5}$ vom Hauptträger, der Aussenradius $\frac{8}{10}$ oder $\frac{4}{5}$ vom Aussenträger betragen. Sind nun in Fig. 6a die Linien *mb* und *mc* zwei Hauptträger, also *mz* ihr Zwischenträger, und in Fig. 6b *md* der dritte gegen *mz* senkrechte Hauptträger, also *me* der zugehörige Aussenträger, so findet man *mh* und *ma* durch die in der Figur angedeutete Theilung, und zieht man dann *hz*, *ha* und *az*, so hat man hierdurch die drei Seiten des gesuchten Dreiecks, was in Fig. 6c noch besonders konstruirt ist.

Würde man 48 solche Dreiecke zusammenfügen, so dass immer je acht in *h* zusammenliegen, je sechs in *a* und je vier in *z*, so würde man den ganzen Körper konstruiren, welchen man nach der Anzahl seiner Begränzungsflächen den Achtundvierzigflächner (Tetrakontaoktaeder) nennt.

Fig. 11 stellt den Achtundvierzigflächner dar, und zwar wie er dem in einer Hauptaxe befindlichen Auge (hier in der Hauptaxe 100) erscheint. Für die Zeichnung desselben ist ebenfalls das Verhältniss 532 zu Grunde gelegt, und nur für diesen besonderen Fall (wie überhaupt für jeden Fall, wo der erste Zeiger der Summe der beiden

andern gleich wird) erscheinen zwei von den in *a* zusammenstossenden Kanten wie eine gerade Linie. Jede Fläche verdeckt eine auf der

Fig. 11.



untern Seite liegende Fläche, deren Bezeichnung man sogleich erhält, wenn man die voranstehenden Zeiger mit einem Striche versieht; so zum Beispiel wird von der Ebene $\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ die Ebene $\overset{|}{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ verdeckt.

17

§ 11. Ableitung der übrigen Krystallgestalten aus dem Achtundvierzigflächner.

1) Werden von den Zeigern einige unter sich gleich, oder gleich Null, so fallen einige Träger, und also auch ihre getragenen Flächen, zusammen. Ist zuerst $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, wie zum Beispiel bei der Gestalt (221), so fallen je zwei Träger, die sich nur durch die Vertauschung jener beiden Zeiger unterscheiden, zusammen; es fällt also die Kante *za* weg, welche eben von zwei solchen Ebenen gebildet wurde; in *z* werden also nur halb so viel, das heisst also zwei Ebenen, zusammenstossen, in *z* wird also keine Ecke mehr sein, sondern es wird nur eine Kante hindurchgehen; in dem Dreieck *hza* wird daher bei *z* ein rechter Winkel sein und zwei solche Dreiecke, die in *za* aneinander gelegt werden, bilden dann ein gleichschenkliges Dreieck, wovon immer je drei in *a* zusammenstossen. — Man nennt diese Gestalt Pyramidenoktaeder, weil sie als ein Oktaeder angesehen werden kann, über dessen Flächen Pyramiden errichtet sind.

2) Wird $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$ wie in der Gestalt (211), so fallen je zwei Träger, welche sich nur durch die Vertauschung dieser kleineren Zeiger unterscheiden, zusammen, es fällt also die Kante ha weg, so dass in h und a nur halb so viel Flächen (also dort vier, hier drei) zusammenstossen; je zwei Dreiecke setzen sich in ha zu einem Viereck zusammen. Die Gestalt heisst Leuzit-Gestalt.

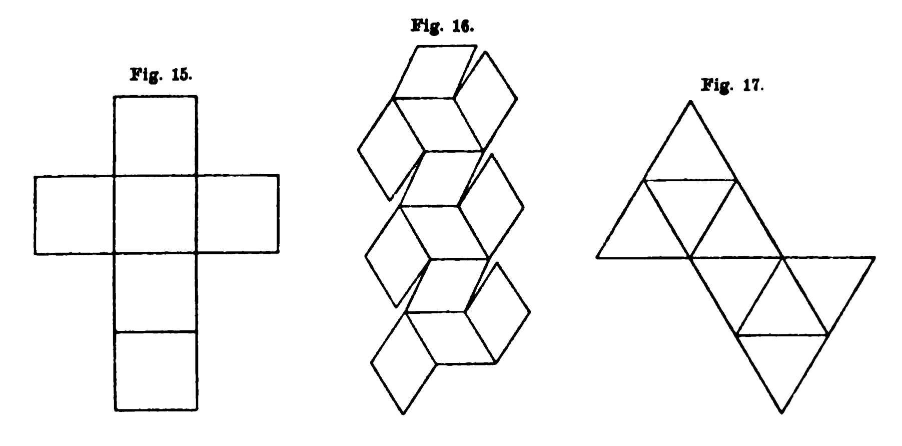
3) Wird $\mathfrak{b}=0$ wie in der Gestalt (210), so fallen je zwei Träger zusammen, in denen der kleinste Zeiger entgegengesetzt war, das heisst es fällt die Kante hz weg, und es bleiben somit in h vier Flächen, in z nur zwei, woraus sogleich folgt, dass das Dreieck hza in z rechtwinklig ist, und dass sich zwei solche Dreiecke in hz zu einem gleichschenkligen Dreieck zusammensetzen. Diese Gestalt hat wie die beiden vorigen 24 Flächen und heisst Pyramidenwürfel.

4) Werden alle drei Zeiger gleich, so fallen je sechs Flächen zusammen, die sich durch Vertauschung der drei Zeiger unterscheiden, also verschwinden alle Ecken in a, also auch alle darin zusammenlaufenden Kanten, somit stossen in z nur noch zwei, in h vier Flächen zusammen; da also der Winkel hza wieder ein rechter wird, so setzen sich die sechs Dreiecke zu einem gleichseitigen Dreieck zusammen, und acht solche gleichseitige Dreiecke bilden das Oktaeder.

5) Wird $\mathfrak{b}=0$ und $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ wie bei der Gestalt (110), so fallen alle Träger zusammen, worin b und c vertauscht sind (ohne Rücksicht auf $\mathfrak{b}$), das heisst, es fällt die Ecke z ganz weg und die vier Dreiecke setzen sich zu einem Rhombus zusammen. Diese zwölf Rhomben geben somit das Rhombendodekaeder.

6) Werden endlich zwei Zeiger null, so fallen alle in h zusammenstossenden Flächen in eine zusammen, und bilden, wie sich unmittelbar ergiebt, ein Quadrat. Sechs solche Quadrate bilden dann den Würfel.

Anm. Man übersieht leicht, dass, wenn man aus der Begränzungsfigur durch wiederholtes Aneinanderfügen die Gestalt zusammensetzen will, man sich


Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17.

dazu eines Netzes bedienen kann, in welchem die Begränzungsflächen so viel wie möglich in der Ordnung liegen, wie sie an einander gränzen. Fig. 15 stellt ein solches Netz für den Würfel, Fig. 16 für's Rhombendodekaeder, Fig. 17 für's Oktaeder dar; und auf diese drei Netze lassen sich die der übrigen Körper dieses Systems leicht zurückführen.

§ 12. **Halbgestalten.**

Von den bisher aufgestellten sieben einfachen Gestalten enthält jede alle möglichen gleichwerthigen Träger, weshalb wir sie vollzählige 18 Gestalten nennen. Oft geschieht es aber, dass in † der Natur auf eine regelmässige Weise die Hälfte der Flächen verschwindet, indem die andere Hälfte die erstere gleichsam überwächst. Dies geschieht aber immer nach dem Gesetz, dass entweder die einzelnen Flächen oder die entsprechenden Flächengruppen abwechselnd hervortreten und verschwinden, das heisst so, dass im ersten Falle nie zwei aneinandergränzende Flächen, im letzteren nie zwei aneinandergränzende Flächengruppen an derselben Gestalt hervortreten oder verschwinden. —

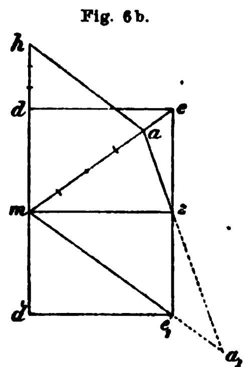
Daraus folgt, dass beim Würfel keine Abwechselung nach einzelnen Flächen statt finden könne, indem, wenn man die vier an eine Fläche angränzenden Flächen auslassen will, diese sich schon untereinander begränzen, was dem Gesetz widerstreitet; und aus demselben Grunde auch nicht beim Rhombendodekaeder (wie überhaupt solche durch Abwechselung der Flächen entstehenden Halbgestalten bei keinem Körper denkbar sind, welcher dreikantige Ecken darbietet). Beim Oktaeder geben die abwechselnden Flächen ein Tetraeder, das heisst einen von vier gleichseitigen Dreicken umgränzten Körper, wie sich aus der Betrachtung des Oktaeders leicht ergiebt, wenn man die abwechselnden Flächen erweitert, bis sie sich gegenseitig schneiden.

Bei allen Gestalten nun, in welchen eine Fläche des Oktaeders durch eine Flächengruppe ersetzt wird, das heisst beim Pyramidenoktaeder, der Leuzitgestalt und dem Achtundvierzigflächner, lassen sich entsprechende Halbgestalten denken, in denen jene Flächengruppen abwechseln, und welche wir, da sie aus dem Tetraeder hervorgehen, tetraedrische Halbgestalten nennen wollen. Beim Pyramidenwürfel geben die abwechselnden Flächen (siehe § 13) eine von zwölf Fünfecken umgränzte Gestalt, welche sich beim Achtundvierzigflächner in je zwei Vierecke brechen. Endlich giebt der Achtundvierzigflächner selbst eine nach einzelnen Flächen wechselnde Halbgestalt.

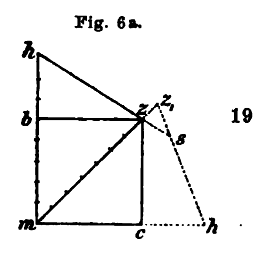
§ 13. **Konstruktion der Halbgestalten.**

Die Konstruktion der Halbgestalten knüpfen wir wieder an die drei Halbgestalten des Achtundvierzigflächners. Bei der tetraedrischen

Halbgestalt desselben wechseln die an den Aussenpunkten liegenden Flächengruppen. Betrachten wir zuerst einen Aussenpunkt, an welchem sämmtliche Flächen verschwinden sollen, so tritt an dem durch diesen Punkt gehenden Aussenträger, sobald jene Flächen verschwunden sind, statt dieses Punktes der nächstliegende von den vier Punkten, in welchem jeder Aussenträger von den Ebenen geschnitten wird, als Punkt der Oberfläche hervor; die Entfernung dieses Punktes beträgt nach § 10 $1:(\mathfrak{h}+\mathfrak{c}-\mathfrak{d})$ von dem Aussenträger, oder für den dort erwähnten Fall, nachdem mit 8 multiplicirt ist, $\frac{8}{6}$ oder $\frac{4}{3}$, und auch in diesem Punkte, den wir mit a_1 bezeichnen wollen, treten sechs Flächen zusammen. Man hat daher nur in Fig. 6b az zu verlängern, bis sie den angränzenden Aussenträger (me_1) in a_1 schneidet (was in der Entfernung $\frac{4}{3}$ geschehen wird); und ebenso hat man in dem Dreieck hza {Fig. 6c} az um das eben gefundene Stück za_1 zu verlängern und a_1h zu ziehen, so werden 24 solche Dreiecke, wovon in a und a_1 immer sechs, in h hingegen vier zusammenstossen, die gesuchte Halbgestalt geben.



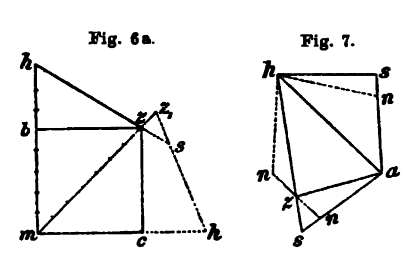
Leicht findet man, wie sich beim Pyramidenoktaeder je zwei solche Dreiecke in a_1a zu einem Viereck, bei der Leuzitgestalt in ah zu einem gleichschenkligen Dreieck zusammensetzen müssen, indem im letzteren Falle bei h zwei rechte Winkel zusammenkommen. Beim Oktaeder hingegen fallen dann alle sechs in a zusammenstossende Flächen in ein gleichseitiges Dreieck zusammen und vier solche Dreiecke geben dann eben das † Tetraeder. —



19

Um nun die zweite Halbgestalt des Achtundvierzigflächners zu konstruiren, in welcher die in hz zusammenstossenden Flächenpaare abwechseln, bemerken wir, dass in jedem Punkt z nur noch zwei Flächen zusammenstossen, also der Punkt z nicht mehr Eckpunkt bleibt; wir haben daher die Linie hz in Fig. 6a über z hinaus zu verlängern; in dem anstossenden Hauptpunkt verschwinden die Flächen, welche den Zwischenträger in z schneiden; wir haben daher den nächsten Punkt z_1 zu suchen, worin die Flächen ihn schneiden; die Entfernung dieses Punktes ist nach § 10 $1:(\mathfrak{h}+\mathfrak{d})$ vom Zwischenträger, oder nachdem man für die besondere Gestalt (532) noch mit 8 multiplicirt hat $\frac{8}{7}$, verbindet man nun den so gefundenen Punkt z_1 mit dem anstossenden Hauptpunkt, so erhält man die Kante, welche in diesem

Hauptpunkt statt der verschwindenden Kante *hz* erscheint. Der Punkt *s* also, wo sich beide Kanten schneiden, wird der Eckpunkt sein, der statt *z* erscheint. Hiernach hat man alle Elemente zur Konstruktion. Man verlängert nun in dem Dreieck *hza*, *hz* um das gefundene Stück *zs*, zieht *as* und errichtet nun über *ah* das Dreieck *ahs*, zu welchem man die Seite *as* aus Fig. 7 selbst, die Seite *hs* aus Fig. 6a kennt*).



Solcher Vierecke setzt man alsdann 24 so zusammen, dass je vier in *h* und ebenso in *s*, je drei aber in *a* zusammentreffen.

Beim Pyramidenwürfel fällt die Kante *hs* weg; und indem dadurch der Winkel bei *h* sich in einen Rechten verwandelt, setzen sich je zwei solche Vierecke in *hs* zu einem Fünfeck zusammen, und zwölf solche Fünfecke bilden dann die Halbgestalt, wovon in *s* nur noch, wie in *a*, drei Flächen zusammentreffen.

Es bleibt nun noch die dritte Halbgestalt des Achtundvierzigflächners, welche durch Abwechselung der einzelnen Flächen entsteht. Ueber jeder der verschwindenden Flächen wird offenbar ein neuer Eckpunkt entstehen, der von den drei umgränzenden Flächen gebildet wird, und den wir *n* nennen wollen. Statt jeder Kante des Dreiecks *hza* treten also zwei sich in *n* schneidende Kanten auf; es würde sich also das Dreieck in ein Sechseck verwandeln; da aber in jedem der drei Punkte *h*, *z* und *a* nur halb so viel Flächen, also in *z* nur zwei erscheinen, so verschwindet die Ecke in *z*, wodurch sich das Sechseck (wie in Fig. 7) in ein Fünfeck verwandelt. Um nun dies Fünfeck zu konstruiren, könnten wir untersuchen, in welchem Punkt jede der fünf Flächen, welche das Fünfeck herausschneiden, die gegenüberstehende Seite des Dreiecks *haz* schnitte, wodurch sich dann die Richtung der fünf Seiten ergeben würde; aber wir haben nur nöthig, dies von der durch *z* gehenden Fläche zu untersuchen, indem wir den Punkt bestimmen, worin diese die Seite *ha* schneidet. Wir werden dazu auf Fig. 6b oder deren Wiederholung in Fig. 8 zurückgehen müssen; die durch *z* gehende Fläche wird, wie sich durch ihre Lage leicht ergiebt, die Träger *mh* und *ma*, welche nach den Endpunkten von *ha* gehen, nicht mehr in den dem Mittelpunkt zunächst liegenden Durchschnittspunkten treffen, sondern in denen, welche zunächst darauf folgen, das heisst

*) Dass die beiden Linien *as* in Fig. 7 wirklich gleich sein müssen, ergiebt sich aus der gleichen Konstruktion, durch welche sie erfolgen müssen.

den Hauptträger in $\frac{1}{\mathfrak{c}}$, den Aussenträger in $\frac{1}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b}}$ oder für unsern Fall (nachdem mit 8 multiplicirt ist) jenen in $\frac{8}{3}$, diesen in $\frac{8}{6}$ oder $\frac{4}{3}$ schneiden. Bezeichnen wir diese Linie mit $h_1 a_1$, so ergiebt sich, dass für diesen Fall $h_1 a_1$ mit ha parallel ist, denn während ha jene Linien in den Entfernungen $\frac{8}{5}$ und $\frac{4}{5}$ schneidet, so schneidet $h_1 a_1$ sie in $\frac{8}{3}$ und $\frac{4}{3}$, da also jene Linien in gleichem Verhältniss geschnitten werden, so ist ha parallel mit $h_1 a_1$ und jene Ebene schneidet also ha gar nicht; also ist auch für diesen Fall die durch z gehende Seite des Fünfecks mit ha parallel*). Um nun das Fünfeck zu konstruiren, haben wir uns nur zu erinnern, dass hier wie bei der vorigen Halbgestalt in jedem Punkte a drei abwechselnde Flächen zusammenstossen, dass also die neuentstehenden Kanten in a hier ganze gleiche Lage haben werden wie dort. Daraus ergiebt sich folgende in Fig. 7 dargestellte Konstruktion: Man zieht durch z eine Parallele mit ha, welche sa in n schneidet, trägt zn auch nach der andern Seite ab, zieht hn, und trägt hn von h aus nach as ab, so ist $nhnanz$ das gesuchte Fünfeck. Vierundzwanzig solcher Fünfecke bilden dann die gesuchte Halbgestalt. —

Fig. 8.

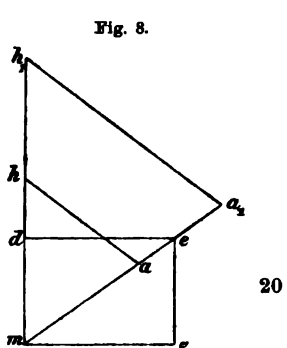


Fig. 7.

Nun könnte es noch möglicher Weise von diesen Halbgestalten wieder Halbgestalten geben, die also Viertelsgestalten von den vollzähligen Krystallgestalten wären. In der That giebt es solche Viertelsgestalt vom Achtundvierzigflächner, welche aus allen drei Halbgestalten desselben abgeleitet werden kann, und welche von zwölf Fünfecken begränzt ist. Ihre Konstruktion erfolgt nach denselben Principien, wie die der früheren Halbgestalten.

§ 14. Zusammengesetzte Gestalten.

Es lassen sich aus diesen einfachen Gestalten nun die mannigfaltigsten Kombinationen denken, und so gelangen wir zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Gestalten, indem ja alle Gestalten des regelmässigen Systems einer Krystallspecies angehören, und also alle möglicherweise an einem und demselben Krystall hervortreten können.

Um ein Beispiel einer solchen Verbindung zu geben, wählen wir den Würfel und das Oktaeder; herrscht hier der Würfel vor, so werden

*) Anm. Dies findet überhaupt statt, wenn der grösste Zeiger so gross ist, als die beiden andern zusammengenommen. Ist dies nicht der Fall, so muss man $h_1 a_1$ und ha verlängern, bis sie sich schneiden, und dann weiter konstruiren.

die Oktaederflächen nur dessen Ecken abschneiden, und umgekehrt, wenn das Oktaeder vorherrscht. Herrscht keines von beiden vor, so schneiden sie sich gegenseitig ihre Kanten weg, und man erhält einen von sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken umgränzten Körper (das Kubo-Oktaeder).

Besonders häufig sind in der Natur die Kombinationen aus Würfel, Oktaeder und Rhombendodekaeder, wo das Rhombendodekaeder die Kanten der beiden ersteren abschneidet. So zeigt sich diese Verbindung zum Beispiel besonders schön am Alaun, wo das Oktaeder vorherrscht, dessen Kanten durch Rhombendodekaederflächen, und dessen Ecken durch Würfelflächen abgeschnitten sind. —

Die Konstruktion aller solcher Gestalten bietet nun nach dem Obigen keine Schwierigkeiten mehr dar, und bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

§ 15. **Das achtzählige System.**

Da hier nur zwei Axen gleich, alle aber gegen einander senkrecht sind, so erhalten wir sämmtliche gleichwerthige Träger durch Vertauschung der gleichen Axen und durch Verwandlung eines jeden Trägers in den entgegengesetzten. Wenn daher der voranstehende Zeiger sich stets auf die ungleiche Axe bezieht, so giebt es folgende gleichwerthige Träger:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}\acute{\mathfrak{d}} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{d}\acute{\mathfrak{c}} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{d}}\acute{\mathfrak{c}} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{c}}\acute{\mathfrak{d}} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{c}}\mathfrak{d} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{d}}\mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$$

$$\acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad \acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}\acute{\mathfrak{d}} \quad \acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{d}\acute{\mathfrak{c}} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{d}}\acute{\mathfrak{c}} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{c}}\acute{\mathfrak{d}} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{c}}\mathfrak{d} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{d}}\mathfrak{c} \quad \acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{d}\mathfrak{c},$$

21 wobei die Träger so geordnet sind, wie sie nebeneinander liegen.

Für jede Krystallspecies muss das Verhältniss der ungleichen Axe zu einer der gleichen gegeben sein. Es sei das Verhältniss (was allemal ein irrationales ist) $m:n$; so werden für den Träger ($\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$) die Richtstücke sich verhalten wie $\mathfrak{b}.m:\mathfrak{c}.n:\mathfrak{d}.n$, also die Axenabschnitte der getragenen Ebene wie $\frac{1}{\mathfrak{b}.m}:\frac{1}{\mathfrak{c}.n}:\frac{1}{\mathfrak{d}.n}$; nehmen wir daher für die Konstruktion die Axen im umgekehrten Verhältniss, und nennen die ungleiche die Hauptaxe, die gleichen Nebenaxen, so wird, wenn von der Hauptaxe $\frac{1}{\mathfrak{b}}$ durch die getragenen Ebenen abgeschnitten wird, von den Nebenaxen $\frac{1}{\mathfrak{c}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ abgeschnitten; es werden die letzteren also in zwei Punkten geschnitten, von denen, wenn $\mathfrak{c}$ grösser ist als $\mathfrak{d}$, nur der erstere $\left(\frac{1}{\mathfrak{c}}\right)$ als Punkt der Oberfläche erscheint. Auch die zwischen zwei Nebenaxen liegende Zwischenaxe wird in zwei Punkten geschnitten, deren Entfernungen $\frac{1}{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}$ von der Zwischenaxe

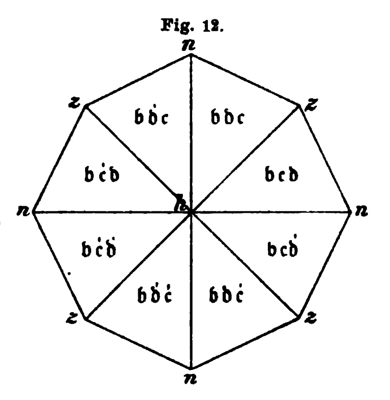
betragen, von denen aber wiederum nur der erste ein Punkt der Oberfläche wird. Die Aussenaxe können wir ganz übergehen, da sie keine ausgezeichneten Punkte der Oberfläche darbietet. Wir benennen den Punkt {der Hauptaxe} wieder mit *h*, den der Nebenaxe mit *n* und den der Zwischenaxe mit *z*. —

Es ist unmittelbar klar, dass in *h* acht Flächen zusammenstossen, in *n* und in *z* aber vier. Die Konstruktion eines solchen Dreiecks *hnz* ergiebt sich nun leicht, und da die Linien *nz* in einer Ebene liegen, so erhalten wir eine achtseitige Doppelpyramide. — Diese verwandelt sich, wenn die an {*hz*} gränzenden Flächen in eine Ebene fallen (das heisst $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ wird), oder wenn die an *hn* gränzenden Flächen zusammenfallen (das heisst $\mathfrak{d} = 0$ wird), in eine quadratische Doppelpyramide, im ersteren Falle in schräger Stellung, im letzteren in gerader. Oder wenn die oberen Träger mit den unteren zusammenfallen (das heisst $\mathfrak{b} = 0$ wird), so verwandelt sie sich in eine achtkantige Säule, und wenn diese Bedingung mit einer der vorigen zugleich eintritt, in eine quadratische Säule in schräger oder gerader Stellung. Wenn endlich $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ gleich 0 werden, so fallen alle acht in *h* zusammentreffenden Flächen in eine Ebene zusammen und man erhält eine Schicht. —

Alle diese einfachen Gestalten treten nun in mannigfache Verbindungen und bilden oft vielfach zusammengesetzte Gestalten. —

Das achtzählige System zeichnet sich aus durch eine grosse Reihe von Halbgestalten; die achtseitige Doppelpyramide lässt deren sechs zu. Denn es können zuerst die in *z*, oder die in *n*, oder die in *zn* zusammenstossenden Flächengruppen sich abwechseln; in allen drei Fällen erhält man, wie leicht zu sehen ist, vierseitige Doppelpyramiden, in den ersten beiden Fällen rhombische, im letzten eine quadratische. Ferner können die in *hn* oder in *hz* zusammenstossenden Flächenpaare wechseln. Dann wird auf den Nebenaxen oder auf den Zwischenaxen, da beide von den sämmtlichen gleichwerthigen Flächen getroffen werden, abwechselnd der nähere und der entferntere Punkt getroffen, und die Konstruktion liefert in beiden Fällen einen von acht Dreiecken umschlossenen Körper, dessen Mittelkanten die Ebene der Nebenaxen durchschneiden. Durch Abwechselung der einzelnen Flächen gelangt man endlich zu der letzten Halbgestalt, einem von acht Vierecken

Fig. 12.



umgränzten Körper (einem Skalenoeder), dessen acht Mittelkanten die Ebene der Nebenaxen durchschneiden. Alle diese Verhältnisse übersieht man leicht aus Fig. 12, wo eine achtseitige Pyramide, in der Richtung der Hauptaxe gesehen, dargestellt ist.

22

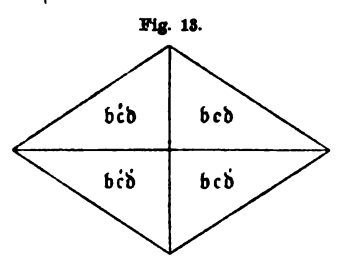
§ 16. Das vierzählige System.

Da hier alle Axen senkrecht gegen einander, aber ungleich sind, so werden nur diejenigen Träger gleichwerthig sein, welche sich nur dadurch unterscheiden, dass statt eines beliebigen Elementarträgers sein Gegenträger genommen wird. In der Ordnung, in welcher sie nebeneinander liegen, aufgestellt, sind die gleichwerthigen Träger folgende:

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{c}}\mathfrak{d} \quad \mathfrak{b}\acute{\mathfrak{c}}\acute{\mathfrak{d}} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}\acute{\mathfrak{d}}$$
$$\acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{c}}\mathfrak{d} \quad \acute{\mathfrak{b}}\acute{\mathfrak{c}}\acute{\mathfrak{d}} \quad \acute{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}\acute{\mathfrak{d}}.$$

Auch hier sind die drei Axen für die Konstruktion im umgekehrten Verhältniss zu nehmen wie die ursprünglichen Träger. Jede der sechs Halbaxen wird nur einmal geschnitten und zwar von vier Flächen; die Ecken sind also alle vierkantig und liegen in den Axen selbst. Man erhält somit eine rhombische Doppelpyramide (das heisst deren Grundfläche ein Rhombus ist), welche sich, wenn ein Zeiger null wird, in eine rhombische Säule, und wenn zwei Zeiger null werden, in eine Schicht verwandelt. —

Fig. 13.



Die rhombische Doppelpyramide bietet durch Abwechselung der einzelnen Flächen eine Halbgestalt dar, nämlich einen von vier ungleichseitigen Dreiecken umschlossenen Körper. Ein solches Dreieck erhält man leicht, wenn man in dem Dreieck der vollzähligen Gestalt durch jede Ecke eine Parallele mit der gegenüberstehenden Seite zieht. Fig. 13 stellt eine rhombische Pyramide dar, wie sie dem in einer Axe befindlichen Auge erscheint.

§ 18. Vollzählige Gestalten des sechszähligen Systems.

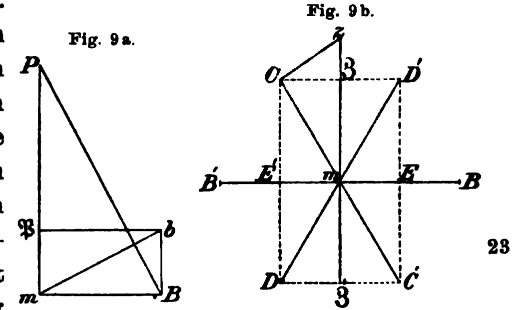
Da die drei Elementarträger bei dem sechszähligen System einander gleich sind und gleiche Winkel einschliessen, so werden alle diejenigen Träger gleichwerthig sein, welche sich nur durch die Vertauschung zweier Elementarträger unterscheiden; (dass ausserdem je zwei entgegengesetzte Träger gleichwerthig sind, versteht sich von selbst). Unter den 48 Trägern von gleicher Zusammensetzung giebt

es daher hier zwölf gleichwerthige Träger. Für die Gestalt (𝔟𝔠𝔡) sind es folgende:

$$\begin{matrix} \mathfrak{bcd} & \mathfrak{bdc} & \mathfrak{cdb} & \mathfrak{dcb} & \mathfrak{dbc} & \mathfrak{cbd} \\ \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{dcb}} & \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{dbc}} & \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{cbd}} & \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{bcd}} & \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{bdc}} & \overset{|\,|\,|}{\mathfrak{cdb}}. \end{matrix}$$

Es entspringt für dies System eine eigenthümliche Schwierigkeit daraus, dass die Elementaraxen schiefwinklig sind, und wir also von dem Gesetze § 9, 1 keine Anwendung machen können, wenn wir nicht die Axen auf rechtwinklige zurückführen. Wenn wir zu diesem Ende den zwischen den drei gleichen Elementarträgern liegenden mittleren Träger nebst seinem Gegenträger zu einer der senkrechten Axen machen, welche wir Hauptaxe nennen, so werden die beiden andern in einer dagegen senkrechten Ebene, der Aequatorebene, liegen müssen; und es ist klar, dass die Elementarträger sowohl gegen die Hauptaxe, als gegen die Aequatorebene gleich geneigt sind.

Es sei nun mb Fig. 9a ein Elementarträger, $\mathfrak{P}mb$ der gegebene Winkel, welchen die Elementarträger mit der Hauptaxe bilden, also $m\mathfrak{P}$ die Hauptaxe, mB sei senkrecht gegen $m\mathfrak{P}$; so werde ich, wenn ich die Lothe bB und $b\mathfrak{P}$ ziehe, mb ansehen können als den mittleren Träger zwischen mB und $m\mathfrak{P}$. Denke ich mir nun von allen Elementarträgern und von ihren Gegenträgern (jedesmal vom Endpunkte aus) Lothe auf die Aequatorebene gefällt, so werden sie dieselbe in sechs Punkten schneiden, welche alle vom Mittelpunkt m so weit entfernt liegen, als mB in Fig. 9 lang ist, und die wir alle mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnen. Fig. 9b stellt hiernach die Aequatorebene dar. Wir nennen hier die Linien $B\overset{|}{B}$ u. s. w. Nebenaxen, und es ist klar, dass sie sich unter gleichen Winkeln schneiden.



Um nun alles auf drei senkrechte Axen zurückzuführen, ist nur noch nöthig, auf einer der Nebenaxen zum Beispiel $B\overset{|}{B}$ eine Senkrechte zu errichten, und die Punkte C, D, $\overset{|}{C}$, $\overset{|}{D}$ zu verbinden. Diese Verbindungslinien durchschneiden nämlich jene beiden senkrechten Axen unter rechten Winkeln und halbiren zugleich die beiden Halbaxen mB und $m\overset{|}{B}$. Daher kann mC angesehen werden als zusammengesetzt aus $m\overset{|}{E}$ oder $\frac{1}{2}m\overset{|}{B}$ und aus $m\mathfrak{Z}$, und die übrigen auf entsprechende Weise. Die sechs Elementarträger sind somit auf drei

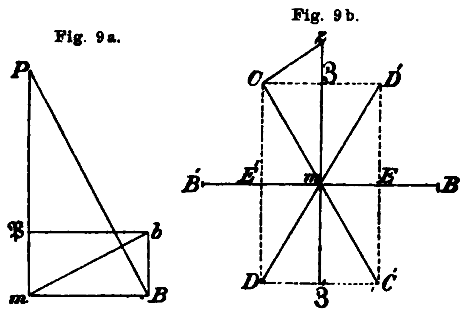
senkrechte Axen zurückgeführt, und zwar ist, wenn wir jeden Träger mit seinem Endbuchstaben bezeichnen, b zusammengesetzt aus B und $\mathfrak{P}$, c aus $\frac{1}{2}\overset{|}{B}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{P}$; d endlich aus $\frac{1}{2}\overset{|}{B}$, $\overset{|}{\mathfrak{Z}}$ und $\mathfrak{P}$, und die entgegengesetzten Träger sind eben so aus den entgegengesetzten Linien zusammengesetzt. Betrachte ich nun irgend einen aus den Elementarträgern zusammengesetzten Träger ($\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$) (wo sich, wie in allen solchen Ausdrücken, die voranstehende Zahl [hier $\mathfrak{b}$] allemal auf die b-Axe, die folgende Zahl auf die c-Axe beziehen soll), so habe ich, um diesen Träger durch die senkrechten Axen auszudrücken, nur zu untersuchen, wie oft jede derselben zur Zusammensetzung angewandt ist. So soll nun b $\mathfrak{b}$-mal vorkommen; b selbst aber ist aus B und $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt, folglich kommen beide $\mathfrak{b}$-mal vor; eben so ist c zusammengesetzt aus $\frac{1}{2}\overset{|}{B}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{P}$, alle drei kommen also $\mathfrak{c}$-mal vor, endlich, da d aus $\frac{1}{2}\overset{|}{B}$, $\overset{|}{\mathfrak{Z}}$ und $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt ist, so kommen diese alle $\mathfrak{d}$-mal vor. — Folglich wird $\mathfrak{P}$ im Ganzen $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$-mal angewandt, B hingegen $(\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{d})$-mal und $\mathfrak{Z}$ endlich $(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})$-mal. Es werden also, da nun die Richtaxen senkrecht sind, die Axenabschnitte der getragenen Ebene sich umgekehrt verhalten, wie diese Richtstücke, also wie

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})} : \frac{1}{B(\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{d})} : \frac{1}{\mathfrak{Z}(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})}.$$

Nehmen wir nun das Verhältniss der drei Axen mP, mB, mZ umgekehrt wie das der vorherigen Axen (wobei wir also mB unverändert lassen), so werden die Abschnitte sich verhalten wie

$$\frac{P}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}} : \frac{B}{\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{d}} : \frac{Z}{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}.$$

Die Konstruktion der Punkte P und Z wird, wie in Fig. 9a und b leicht bewerkstelligt, indem man dort BP senkrecht zieht gegen mb, und hier CZ senkrecht gegen mC.


Fig. 9a. Fig. 9b.

Um nun die sämmtlichen Schnitte der zwölf Ebenen mit den Axen zu erhalten, nehmen wir wieder vorläufig die Träger so kurz an, dass die getragenen Ebenen wirklich durch die Punkte $\frac{P}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}$ u. s. w. gehen. Alsdann werden offenbar sechs Ebenen durch den Punkt $\frac{P}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}$ gehen und sechs durch den entgegenge-

setzten, wir nennen diese Punkte Pole und bezeichnen sie mit p und $\overset{|}{p}$, wobei wir p den Nordpol, und $\overset{|}{p}$ den Südpol nennen können. Jede Nebenaxe wird hingegen im Allgemeinen in sechs Punkten geschnitten, nämlich in

$$\frac{N}{\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{d}},\ \frac{N}{\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{d}},\ \frac{N}{\mathfrak{d}-\frac{1}{2}\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}},$$

und in den drei entgegengesetzten $\frac{\overset{|}{N}}{\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\frac{1}{2}\mathfrak{d}}$ u. s. w., wo wir unter N jede beliebige der Nebenaxen verstehen, also B, C oder D.

Wenn hier übrigens die Zahlen, welche subtrahirt werden sollen, grösser sind, als die, wovon subtrahirt wird, so ist dies ein Zeichen, dass der Durchschnitt die entgegengesetzte Halbaxe trifft. Ist zum Beispiel $\mathfrak{b}$ der grösste und $\mathfrak{d}$ der kleinste Zeiger, wie wir dies immer voraussetzen, so wird dieser Fall bei dem letzten Schnitt $\frac{N}{\mathfrak{d}-\frac{1}{2}\mathfrak{b}-\frac{1}{2}\mathfrak{c}}$ immer eintreten und wir schreiben deshalb statt dessen besser $\frac{\overset{|}{N}}{\frac{1}{2}\mathfrak{b}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}$; um zugleich die Brüche $\frac{1}{2}$ † wegzuschaffen, können wir Zähler und Nenner jener Ausdrücke mit zwei multipliciren. 24

Sonach sind die sechs Schnitte folgende:

$$\frac{2N}{2\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}\quad \frac{2N}{2\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}\quad \frac{2\overset{|}{N}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{d}}$$
$$\frac{2\overset{|}{N}}{2\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}\quad \frac{2\overset{|}{N}}{2\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}\quad \frac{2N}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{d}}.$$

Der Ausdruck $(2\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d})$ wird null, wenn, wie beim Träger (753), die Unterschiede je zweier aufeinander folgender Zeiger gleich sind; er bleibt grösser als Null, wenn, wie bei (752), der erste Unterschied kleiner ist, als der zweite; im entgegengesetzten Falle wird er kleiner als Null, und wir haben dann mit dem zweiten Schnitt dieselbe Veränderung vorzunehmen wie mit dem dritten. In jedem solchen Punkte stossen aber zwei Ebenen zusammen, zum Beispiel in dem ersten die Ebenen $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ (überhaupt die, worin die in jenen Ausdrücken abzuziehenden Zeiger die zweite und dritte Stelle einnehmen). Es bilden also jene Punkte keine Ecken, sondern nur die Durchgangspunkte der von den Polen ausgehenden Kanten durch den Aequator; und zwar werden die drei Schnitte der ersten Reihe von den nordpolaren Kanten gebildet, die der zweiten von den südpolaren. Indem nun jede dem Mittelpunkte näher liegende Kante die entferntere, wenn sie durch dieselbe Halbaxe geht, verdrängt, so werden durch jene Halbaxe zwei Kanten hindurchgehen, eine nordpolare und eine südpolare; denn von den drei Schnitten, welche jede Halbaxe (N) treffen, ver-

drängt der Schnitt $2N:(2\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d})$ den andern nordpolaren Schnitt; wir bezeichnen diesen Punkt mit n, hingegen den Punkt $2N:(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{d})$ mit $\overset{|}{n}$. Also ist

$$n=\frac{2N}{2\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}},\ \overset{|}{n}=\frac{2N}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{d}}.$$

Als besonderen Fall haben wir hier den hervorzuheben, wo n und $\overset{|}{n}$ zusammenfallen, dies wird nämlich der Fall sein, wenn die Unterschiede je zweier aufeinander folgender Zeiger gleich sind.

Die Schnitte mit der dritten Art Axen (Z), die wir Zwischenaxen nennen, könnten wir zwar für die Konstruktion entbehren; aber doch wird es die Uebersicht sehr erleichtern, wenn wir auch sie in Betracht ziehen. Der Durchschnitt der Ebene ($\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$) mit der Axe Z in Fig. 9b fand sich gleich $\frac{Z}{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}$; also die sämmtlichen sechs Schnitte einer jeden Zwischenaxe (denn deren sind auch drei denkbar) werden sein:

$$\frac{Z}{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}\quad \frac{Z}{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}\quad \frac{Z}{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}},$$
$$\frac{\overset{|}{Z}}{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}}\quad \frac{\overset{|}{Z}}{\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}\quad \frac{\overset{|}{Z}}{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}.$$

In jedem solchen Punkte stossen ebenfalls zwei Ebenen zusammen, zum Beispiel in dem letzteren $\frac{Z}{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}$ die Ebenen $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}$ und $\overset{|}{\mathfrak{c}}\,\overset{|}{\mathfrak{b}}\,\overset{|}{\mathfrak{d}}$, von denen die eine dem Nordpol, die andere dem Südpol angehört. Es sind also jene Punkte nur Durchschnittspunkte der Kanten (Randkanten) mit dem Aequator. Es ist klar, dass hier die Kante, welche durch den Punkt $\frac{Z}{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}$ geht, die übrigen verdrängt, da dies der dem Mittelpunkt zunächst liegende Punkt sein wird. Wir bezeichnen diesen Punkt mit z und konstruiren alle Gestalten so, dass dieser Punkt z ihnen gemeinschaftlich wird. Damit dieser Punkt in Z selbst falle, multipliciren wir alle jene Ausdrücke für p, n, $\overset{|}{n}$ und z mit $(\mathfrak{b}-\mathfrak{d})$ und erhalten somit:

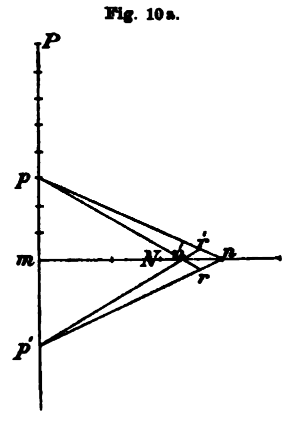
$$p=\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}P,\ n=\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}{2\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d}}2N,\ \overset{|}{n}=\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{d}}2N,\ z=Z.$$

25 Hiernach ergiebt sich nun die Konstruktion für jeden einzelnen Fall sehr leicht, wenn wir nur noch bemerken, dass die nord- und die südpolare Kante, welche durch dieselbe Halbaxe gehen, da, wo sie sich durchschneiden, eine vierkantige Ecke bilden, die wir mit r oder $\overset{|}{r}$ bezeichnen, je nachdem sie auf der Nord- oder Südseite des Aequators liegt. Es sei nun die Gestalt 431 zu konstruiren, so ist

$$p=\tfrac{3}{8}P,\quad n=\tfrac{3}{4}2N,\quad \overset{|}{n}=\tfrac{3}{5}2N.$$

Hiernach sind die Punkte p, n, $\overset{|}{n}$ in Fig. 10a und b konstruirt. Man ziehe nun zunächst pn, $p\overset{|}{n}$ in Fig. 10a und $n\overset{|}{n}$ in Fig. 10b, und konstruire daraus das Dreieck $pn\overset{|}{n}$ Fig. 10c. Dann ziehe man in Fig. 10a die Linien $\overset{|}{p}n$ und $\overset{|}{p}\overset{|}{n}$, und verlängere diese, wie auch die von p aus gezogenen Linien, bis sie sich in r und $\overset{|}{r}$ schneiden und trage dann pr und $p\overset{|}{r}$ in Fig. 10c ab, so ist $pr\overset{|}{r}$ eins der Dreiecke, was die Gestalt begränzt. Zwölf solche Dreiecke, wovon sechs in p, und je vier in r und $\overset{|}{r}$ zusammentreffen, umgränzen dann die ganze Gestalt.

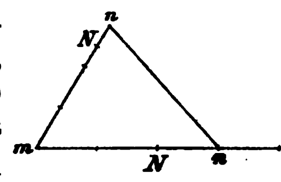
Fig. 10a.



Man nennt diese Gestalt, deren Randkanten ($r\overset{|}{r}$) den Aequator schneiden, ein Skalenoeder, was sich für den besonderen Fall, dass n und $\overset{|}{n}$ zusammenfallen (s. oben), in eine sechsseitige Doppelpyramide verwandelt. —

Wir haben in der ganzen bisherigen Entwickelung nur solche zusammengesetzte Träger betrachtet, deren Elementarträger demselben Pole angehörten. Anders verhält es sich zum Beispiel mit der Gestalt $\overset{|}{\mathfrak{b}}\mathfrak{c}\mathfrak{b}$. Die zwölf gleichwerthigen Träger würden wir hier erhalten, wenn wir in der obigen Zusammenstellung $\mathfrak{b}$ überall entgegengesetzt nehmen (das heisst statt $\mathfrak{b}$ hier schreiben $\overset{|}{\mathfrak{b}}$, und statt $\overset{|}{\mathfrak{b}}$ hier $\mathfrak{b}$). —

Fig. 10b.

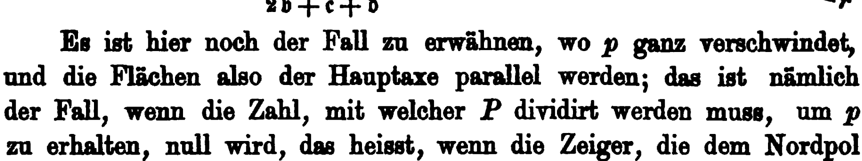


Dadurch werden alle oben dargestellten Ausdrücke sich so verändern, dass auch in ihnen $\mathfrak{b}$ entgegengesetzt zu nehmen ist, das heisst, wo es dort hinzuzuaddiren war, es hier zu subtrahiren ist und umgekehrt. Doch hat man dann noch immer wieder zu untersuchen, welche Kante die andere verdrängt; und wenn man dies alles gehörig in Erwägung zieht, so wird man erhalten: —

$$p = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}+\mathfrak{b}-\overset{|}{\mathfrak{b}}}P, \quad n = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2\mathfrak{c}+\mathfrak{b}-\overset{|}{\mathfrak{b}}}2N,$$

$$\overset{|}{n} = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\overset{|}{\mathfrak{b}}}2N.$$

Fig. 10c.



Es ist hier noch der Fall zu erwähnen, wo p ganz verschwindet, und die Flächen also der Hauptaxe parallel werden; das ist nämlich der Fall, wenn die Zahl, mit welcher P dividirt werden muss, um p zu erhalten, null wird, das heisst, wenn die Zeiger, die dem Nordpol

zugehören, zusammen eben so gross sind als der dem Südpol zugehörige, zum Beispiel in der Gestalt $\overset{|}{5}32$. Alsdann verwandelt sich das Skalenoeder in eine zwölfkantige Säule. Fallen die in einer Polarkante zusammenstossenden Flächen zusammen, so verwandelt sich das Skalenoeder in einen von sechs Rhomben umschlossenen Körper (Rhomboeder); fallen die Ebenen zu beiden Seiten einer Randkante zusammen, so erhält man eine sechskantige Säule; fallen endlich die Flächen um p zusammen, so erhält man eine Schicht. —

Fig. 14.

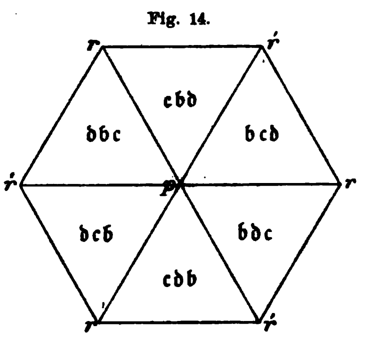


Fig. 14 stellt ein Skalenoeder dar, in der Richtung der Hauptaxe gesehen, die Punkte r und $\overset{|}{r}$ muss man sich abwechselnd über und unter der Aequatorebene denken.

§ 19. Halbgestalten des sechszähligen Systems.

Das Skalenoeder liefert zwei Halbgestalten, indem entweder die an den Randkanten liegenden Flächenpaare wechseln, oder die einzelnen 26 Flächen selbst. Im letzteren Falle erhält man † ein Rhomboeder, im ersteren ein von sechs Vierecken umschlossenes Skalenoeder. Wenn das vollzählige Skalenoeder in eine sechsseitige Doppelpyramide übergeht, so verwandelt sich das halbzählige Skalenoeder in eine dreiseitige Doppelpyramide; geht aber jenes in eine zwölfkantige Säule über, so verwandelt sich dies in eine sechskantige Säule mit abwechselnd schärferen und stumpferen Kanten, während das Rhomboeder in eine regelmässige sechskantige Säule übergeht. Alles dies wie auch die Konstruktion dieser Gestalten ergiebt sich leicht, wenn man das früher dargestellte Verfahren auf diesen Fall konsequent anwendet.

§ 20. Das zweizählige und das einzählige System.

Beide Systeme geben keine einfachen, geschlossenen Gestalten mehr, sondern das erste nur rhombische Säulen und Schichten, das letzte nur Schichten. Desto reichhaltiger sind aber die Verbindungen verschiedener einfacher Gestalten, welche demselben Axenverhältniss zugehören. Die unendliche Mannigfaltigkeit dieser zusammengesetzten Gestalten gestattet keine allgemeine Darstellung mehr, während in jedem einzelnen Falle die Verhältnisse sich nach der für die andern Systeme entwickelten Methode darlegen.

II. Neue Theorie der Elektrodynamik. 1

Von

Hermann Grassmann.

Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, Bd. 64, Erstes Stück, S. 1—18 (1845).

Es ist bekannt, dass sich die bewegenden Wirkungen, welche elektrische Ströme oder Magnete auf einander oder die einen auf die andern üben, so weit sich bisher unsere Beobachtungen erstrecken, aus Einer Voraussetzung ableiten lassen. Das Gebiet, auf welchem sich jene Beobachtungen bewegen, lässt aber noch, wie ich hernach zeigen werde, für die Annahme der gegenseitigen Einwirkung zweier Stromtheile einen freien Spielraum übrig. Indem ich nun die Ampère'sche Annahme, nach welcher, wie es sein muss, die gegenseitige Einwirkung zweier unendlich kleinen Stromtheile zu Grunde gelegt wird, einer genaueren Prüfung unterwarf, so ergab sich mir dieselbe als höchst unwahrscheinlich; und indem ich zunächst das Willkürliche in jener Annahme fortzuschaffen suchte, so bot sich mir eine andere Annahme dar, welche die elektrodynamischen Erscheinungen, so weit sie in den Kreis der bisher angestellten Beobachtungen fallen, mit gleicher Genauigkeit darstellt, welche aber sowohl durch die Einfachheit der zu Grunde gelegten Formel, als auch durch die vollkommene Analogie mit allen andern bewegenden Kräften den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit besitzt.

Ich habe schon angedeutet, dass diese neue Annahme, auf alle bisher beobachteten Erscheinungen angewandt, dieselben Resultate liefert, wie die Ampère'sche; hingegen giebt es ein Gebiet der Erscheinungen, auf welchem nach beiden Annahmen oft gerade die entgegengesetzten Erfolge eintreten müssten, und welches daher von Seiten der † Erfahrung her die einzige Entscheidung über die Richtigkeit der 2 einen oder der andern Annahme liefern würde. Es ist diess, wie ich am Schlusse dieser Abhandlung zeigen werde, das Gebiet der Strömungen,

welche durch freie, an den Enden einer Leitung aufgehäufte (entgegengesetzte) Elektricitäten hervorgebracht werden, also das Gebiet der durch Maschinenelektricität hervorgerufenen Strömungen.

Die Versuche, welche man bisher auf diesem Gebiete angestellt hat, um elektrodynamische Wirkungen, wie zum Beispiel die Ablenkung einer Magnetnadel, nachzuweisen, sind sehr weit davon entfernt, die Differenz beider Hypothesen irgend wie hervortreten zu lassen. Auch stellen sich solchen Versuchen, welche diess leisten können, bisher noch bedeutende Schwierigkeiten entgegen. Dennoch scheint es mir wichtig, eine Hypothese als wahrscheinlich nachzuweisen, welche die Erfolge vorhersagen würde, die bei feineren Instrumenten und genaueren Beobachtungen eintreten müssten. Eine solche Annahme würde ein leitendes Princip werden, wonach von geübter Hand vielleicht bald entscheidende Versuche angestellt werden könnten. Es sei mir daher erlaubt, hier diese neue Annahme abzuleiten, und geübteren Physikern zur Prüfung vorzulegen.

1) Alle Versuche, welche bisher in Bezug auf elektrodynamische Erscheinungen angestellt sind, sind entweder mit geschlossenen Strömen angestellt, oder doch mit solchen Strömen, die wie geschlossene angesehen werden können*). Diese Versuche bestehen darin, dass man entweder die gegenseitigen Einwirkungen zweier geschlossener Ströme beobachtet, oder dass man einen Theil † eines geschlossenen Stromes beweglich macht, und theils die Einwirkung beobachtet, welche er durch den ganzen Strom, dem er angehört, erleidet, theils die Aenderung dieser Einwirkung, welche erfolgt, wenn noch ein anderer geschlossener Strom hinzutritt. Da nun dadurch, dass man einen Theil eines Stromes beweglich macht, die Wirkung, welche der ganze Strom hervorruft, nicht geändert wird, so erstrecken sich die bisher angestellten Versuche nur auf die Wirkungen, welche geschlossene Ströme üben, sei es nun auf andere geschlossene Ströme oder auf Stromtheile. Hingegen hat man keinen Versuch angestellt, um die Wirkung eines Stromtheils zu prüfen, weder die, welche er auf einen geschlossenen Strom, noch die, welche er auf einen andern Stromtheil übt.

2) Daher musste Ampère, um zu seiner Formel zu gelangen, mit den Ergebnissen der Beobachtung eine willkürliche Annahme verbinden. Die Annahme, welche er zu diesem Ende macht, ist für den

*) Dahin gehören die Ablenkungen der Magnetnadel durch Entladungen einer Batterie, wobei einestheils die zahlreichen Umwindungen des Multiplikators, anderentheils die Nähe der nur durch die Dicke des Glases getrennten Elektricitäten, welche ausgeglichen werden, die Ströme, ihren beobachtungsfähigen Wirkungen nach, den geschlossenen Strömungen gleich machen.

ersten Anblick eine höchst einfache und naturgemässe, nämlich dass zwei unendlich kleine Stromtheile längs der ihre Mitten verbindenden geraden Linie auf einander wirken, also entweder anziehend oder abstossend im eigentlichen Sinne.

Vermöge dieser Annahme gelangt nun Ampère von den Ergebnissen der Beobachtung aus mit Nothwendigkeit zu seiner Grundformel, nach welcher die Kraft, mit der ein unendlich kleiner Stromtheil a auf einen anderen b anziehend wirkt, proportional ist dem Ausdrucke:

$$(1) \qquad \frac{ab}{r^2}(2 \cos \varepsilon - 3 \cos \alpha \cos \beta),$$

wo a und b die Stromelemente, das heisst, die mit den Strömungsintensitäten multiplicirten unendlich kleinen Linientheile sind, in welchen sich die Ströme bewegen, r die Entfernung der Mittelpunkte dieser Linientheile von einander, ε den Winkel zwischen beiden Stromtheilen, α und β die Winkel bedeuten, welche diese Stromtheile a und b beziehlich mit dem Strahle bilden, welcher von dem Mittelpunkte eines dieser Stromtheile durch den des andern gezogen werden kann. 4

3) Schon die verwickelte Gestalt dieser Formel muss einen Verdacht gegen sie erregen. Dieser Verdacht muss noch gesteigert werden, wenn man sie anzuwenden versucht. Betrachtet man zum Beispiel den einfachsten Fall, dass beide Stromtheile parallel, also $\varepsilon = 0$, $\alpha = \beta$ seien, so geht der Ampère'sche Ausdruck über in:

$$(1^*) \qquad \frac{ab}{r^2}(2 - 3 \cos^2 \alpha),$$

woraus hervorgeht, dass wenn $\cos^2 \alpha$ gleich $\frac{2}{3}$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $\cos 2\alpha$ gleich $\frac{1}{3}$ ist, das heisst, wenn der Mittelpunkt des angezogenen Elementes auf einer Kegeloberfläche liegt, deren Spitze in dem anziehenden Elemente, und deren Winkel an der Spitze zum Cosinus $\frac{1}{3}$ hat, keine Einwirkung erfolgt, innerhalb derselben Abstossung, ausserhalb Anziehung stattfindet. Dies Ergebniss hat in der That zu wenig Wahrscheinlichkeit, als dass man nicht gegen die Annahme, aus welcher es hervorgeht, einen Verdacht schöpfen sollte, so sehr dieselbe auch dem Scheine nach durch die Analogie aller übrigen Kräfte vertreten sein mag.

Dazu kommt, dass die Anwendung jener Analogie auf unser Gebiet als eine wenig begründete erscheint. Denn bei allen anderen Kräften sind es ursprünglich punktartige Elemente, das heisst, Elemente ohne bestimmte Richtungen, welche auf einander wirken, und bei diesen lässt sich die Nothwendigkeit der gegenseitigen Wirkung längs ihrer Verbindungslinie sogar *a priori* ableiten; was berechtigt uns aber,

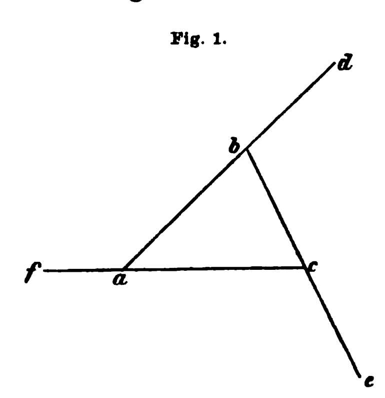
diese Analogie auf ein ganz fremdartiges Gebiet, auf welchem die Elemente mit bestimmten Richtungen begabt sind, zu übertragen? Auch spricht die Formel selbst, welche keineswegs etwa der Formel für die Anziehung durch Gravitation ähnlich ist, es deutlich genug aus, dass die Analogie in dieser Weise nicht stattfindet.

5 4) Ich gehe daher, ohne zunächst eine willkürliche Voraussetzung zu machen, davon aus, das Willkürliche der Ampère'schen Hypothese auszuscheiden, wobei ich, wie es geschehen muss, annehme, dass diese Hypothese, so weit sie durch Versuche bisher geprüft ist, das heisst, so weit sie sich auf die Anziehungen bezieht, welche geschlossene Ströme auf andere Ströme oder Stromtheile üben, vollkommen bewährt sei.

Es ergiebt sich zuerst leicht, dass man alle Erscheinungen, welche innerhalb des soeben bezeichneten Gebietes liegen, ableiten kann, wenn man die Einwirkung kennt, welche ein Winkelstrom, das heisst ein unendlicher Strom, welcher einen Winkel durchströmt, auf ein Stromelement übt, dessen Mittelpunkt in der Ebene des Winkels liegt. Denn erstens kann ich jeden geschlossenen oder nicht geschlossenen Strom ansehen als zusammengesetzt aus solchen Stromelementen, und zweitens kann ich jeden geschlossenen Strom als ein von dem Strome durchflossenes Polygon, dieses Polygon aber, als zusammengesetzt aus Winkelströmen, welche die Aussenwinkel desselben bilden, ansehen, wobei ich nur aus der Erfahrung voraussetze, dass gleich starke einander entgegengesetzte Ströme, welche durch denselben Leiter fliessen, sich einander aufheben.

So zum Beispiel kann ich den Strom *abc* (Fig. 1) ansehen als zusammengesetzt aus den drei Winkelströmen *fad*, *dbe*, *ecf*. Endlich kann ich, indem ich von der Mitte des angezogenen Elementes einen Strahl durch den Scheitel des Winkelstromes lege, diesen in zwei Winkelströme zerlegen, deren jeder mit der Mitte des angezogenen Elementes in derselben Ebene liegt. Es kommt also, um aus der Ampère'schen Formel das Willkürliche fortzuschaffen, nur darauf an, aus ihr die Wirkung eines Winkelstromes auf ein derselben Ebene anliegendes Element abzuleiten.

Fig. 1.



5) Aus der Ampère'schen Formel folgt sogleich, dass die Ein-
6 wirkung, welche ein Element durch ein anderes † erfährt, wenn beide

Elemente nicht in derselben Ebene liegen, gleich ist der Einwirkung, welche die senkrechte Projektion des ersteren auf die durch seine Mitte und das letztere gelegte Ebene durch dasselbe Element erfährt. Diese Beziehung wird also auch für unseren Fall fortbestehen; und wir haben somit nur noch die Wirkung eines Winkelstromes auf ein Element derselben Ebene, also zunächst die eines durchströmten Strahles auf ein solches Element zu suchen. Diese Wirkung können wir in eine längs dem Elemente und in eine senkrecht dagegen erfolgende zerlegen.

6) Für diese Längswirkung ergiebt sich, dass sie von der Richtung des Strahles unabhängig ist*), also † für einen Winkelstrom 7 eben so gross ist, als ob beide Strahlen zusammenfielen, das heisst gleich Null ist. Daraus folgt, dass die Wirkung, welche ein Winkelstrom auf ein seiner Ebene anliegendes Element übt, senkrecht gegen das letztere in dieser Ebene erfolgt, worin, beiläufig bemerkt, liegt,

---

*) Denn man hat aus Ampères Formel, wenn ds ein Element des Strahles (in der Richtung des Strahles genommen) ist, und i die Intensität der Strömung ist, welche von dem Anfangspunkt des Strahles aus diesen durchläuft, für die Anziehung, welche diess Element auf das Stromelement b nach dessen Längsrichtung übt, den Ausdruck:

$$-\frac{idsb}{r^2}\cos\beta\,(2\cos\varepsilon - 3\cos\alpha\cos\beta).$$

Fig. 2.

Wenn ferner l das Loth von der Mitte des angezogenen auf die Linie des anziehenden Elementes ist (siehe Fig. 2) ds gleich

$$-d(l\cot\alpha) = \frac{l\,d\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{r^2\,d\alpha}{l},$$

während $\varepsilon = \alpha - \beta$, $d\beta = d\alpha$ ist.

Dadurch wird der obige Ausdruck:

$$= \frac{ib}{l}(\cos^2\beta\cos\alpha\,d\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\,d\beta),$$

was integrirt giebt:

$$\frac{ib}{l}\sin\alpha\cos^2\beta.$$

Dehnt man die Integration über den ganzen Strahl aus, und setzt schliesslich α, β, r insbesondere als die dem Anfangspunkte des Strahles zugehörigen Werthe, so erhält man, statt l wieder sein Werth $r\sin\alpha$ gesetzt, den Ausdruck:

$$-\frac{ib}{r}\cos^2\beta$$

für die Längswirkung des Strahles, welche somit von α, also von der Richtung des Strahles, unabhängig ist.

dass die Wirkung eines beliebigen geschlossenen Stromes auf ein Stromelement stets senkrecht gegen das letztere erfolgt.

7) Die gegen das angezogene Element senkrechte Bewegung, welche ihm nach Ampères Formel durch einen mit jenem Elemente in derselben Ebene liegenden durchströmten Strahl mitgetheilt wird, ergiebt sich als aus zwei Gliedern bestehend, deren eines von der Richtung des anziehenden Strahles unabhängig ist, und also bei der Annahme von Winkelströmen verschwindet, und deren anderes

$$\frac{ib_1}{r}\cot\tfrac{1}{2}\alpha \text{ *)} \tag{2}$$

ist, wo r die Entfernung des Elementes vom Anfangspunkte des Strahles 8 und α der Winkel ist, welchen der † Strahl mit dem von seinem Anfangspunkte durch das Element gezogenen Strahle bildet, wo b_1 die senkrechte Projektion des Elementes auf die durch seine Mitte und den Strahl gelegte Ebene ist, i aber die Intensität des den Strahl durch-

---

*) Nämlich mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung ist die Wirkung eines Elementes ids des den Strahl durchlaufenden Stromes auf das Stromelement b_1 nach der gegen das letztere senkrechten Richtung gleich:

$$\frac{idsb_1}{r^2}\sin\beta\,(2\cos\varepsilon - 3\cos\alpha\cos\beta),$$

was wieder, da

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{d\alpha}{l},\; d\alpha = d\beta,\; \varepsilon = \alpha - \beta,$$

also

$$2\cos\varepsilon = \cos\varepsilon + \cos(\alpha - \beta)$$

ist, übergeht in

$$\frac{ib_1}{l}(\cos\varepsilon\sin\beta d\beta - 2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta d\beta + \sin^2\beta\sin\alpha d\alpha),$$

und also integrirt giebt:

$$-\frac{ib_1}{l}[\cos\varepsilon\cos\beta + \cos\alpha\sin^2\beta];$$

und diess liefert, wenn die Integration über den ganzen Strahl ausgedehnt wird, und die Bezeichnungen der veränderlichen Grössen (α, β) jetzt auf ihre für den Anfangspunkt des Strahles eintretenden Werthe beschränkt werden, den Ausdruck:

$$\frac{ib_1}{l}[1 + \cos\varepsilon\cos\beta + \cos\alpha\sin^2\beta],$$

indem im Unendlichen α 180° wird und β in 180° — ε übergeht. Setzt man endlich statt l und ε ihre Werthe $r\sin\alpha$ und $(\alpha - \beta)$, zieht das dann sich entwickelnde Glied $\cos\alpha\cos^2\beta$ mit $\cos\alpha\sin^2\beta$ in Ein Glied $\cos\alpha$ zusammen, und setzt statt $(1 + \cos\alpha) : \sin\alpha$ seinen Werth $\cot\frac{1}{2}\alpha$, so erhält man:

$$\frac{ib_1}{r}(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\beta\cos\beta),$$

wo das zweite Glied von α, das heisst von der Richtung des anziehenden Strahles unabhängig ist.

laufenden Stromes ausdrückt, und wo endlich das Stromelement sich nach seiner rechten oder linken Seite hin bewegt, je nachdem der Strom in dem Strahle demjenigen, welcher, von ihm aus das Element betrachtet, zur rechten oder zur linken Hand fortläuft.

Hieraus folgt die Wirkung eines Winkelstromes, dessen Schenkel die Winkel α und α' mit dem durch das angezogene Element geführten Strahle bilden, gleich:

$$(3) \qquad \frac{ib_1}{r}\left(\cot \tfrac{1}{2}\alpha - \cot \tfrac{1}{2}\alpha'\right).$$

Hieraus folgt, beiläufig bemerkt, dass die Grösse der Bewegung, welche ein Stromelement von einem in gleicher Ebene mit ihm liegenden Strome erfährt, unabhängig ist von der Richtung dieses Elementes, aber stets senkrecht gegen dasselbe nach derselben Seite hin erfolgt.

8) Der gefundene Ausdruck (3) für die Wirkung eines Winkelstromes enthält nun, da diese Wirkung sich wenigstens annäherungsweise durch Versuche nachweisen lässt, nichts Hypothetisches mehr zugleich enthält er die Resultate der Beobachtungen, da sie sich alle auf die Wirkung von Winkelströmen zurückführen lassen, vollständig in sich, und kann daher als Grundlage einer jeden Hypothese über die gegenseitige Einwirkung der † Stromelemente dienen. Da nun dieser 9 Ausdruck aus zwei Gliedern besteht, von denen das eine durch die Lage des Einen Strahles und das andere eben so durch die des andern bedingt ist, so erscheint es durchaus als das Einfachste, diese Glieder als Ausdrücke für die Wirkungen der einzelnen Strahlen zu nehmen, das heisst, den Ausdruck (2) als den wirklichen Ausdruck für die Anziehung eines durchströmten Strahles zu setzen. In der That bringt jede andere Annahme etwas Fremdartiges in die Formel hinein, und erscheint daher als eine erkünstelte.

Ich lege daher jenen Ausdruck (2) nämlich

$$\frac{ib_1}{r}\cot \tfrac{1}{2}\alpha$$

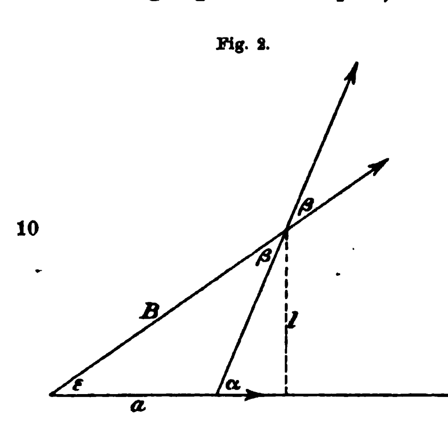
als Ausdruck für die Wirkung eines Strahles in dem oben näher dargelegten Sinne für die folgende Entwicklung zu Grunde.

9) Von hier aus gelangen wir sogleich zu der gegenseitigen Einwirkung zweier Stromelemente, indem wir das anziehende Stromelement ids als Vereinigung zweier durchströmter Strahlen auffassen können, welche die Richtung und Intensität (i) dieses Elementes haben, und von denen der eine in gleicher Richtung mit dem Element, der andere in entgegengesetzter von dem (positiven) Strome durchflossen wird, während der erste den Anfangspunkt des Elementes zu seinem Anfangspunkte hat, der letzte den Endpunkt.

Man erhält dann

$$\frac{ab_1}{r^2}\sin\alpha \tag{4}$$

als Ausdruck der Wirkung, welche ein Stromelement a auf ein anderes, um r von ihm entferntes b übt, dessen senkrechte Projektion auf die durch a und r gelegte Ebene b_1 ist, während α den Winkel darstellt, welchen a mit dem nach b hin gezogenen Strahle bildet; und zwar erfolgt die Bewegung senkrecht gegen b (oder b_1) in der durch a und r gelegten Ebene nach derjenigen Seite hin, nach welcher der Schenkel a des Winkels α von † dem andern Schenkel aus betrachtet liegt (siehe Fig. 2)*).



10) Betrachten wir zunächst die gegenseitigen Einwirkungen zweier Stromelemente a und b, deren Verlängerungen sich schneiden, so ist klar, dass man beide Bewegungen, da sie gegen die sich bewegenden Stromelemente senkrecht sind, als durch Schwenkung der beiden geraden Linien, denen die Stromelemente angehören, um den Durchschnittspunkt bewirkt ansehen kann. Dann ist der Winkel, um welchen sich eine der Linien, etwa die, welcher b angehört, schwenkt, gleich der Bewegung des Elementes dividirt durch die Entfernung (B) dieses Elementes von jenem Durchschnitte, also gleich:

$$\frac{ab}{r^2}\frac{\sin\alpha}{B} = \frac{ab\sin\varepsilon}{r^3}\text{**)}. \tag{5}$$

Diese Formel lehrt, dass die Strahlen, in welchen beide Elemente liegen, bei der Bewegung einen gleichen Winkel zu beschreiben trachten, während ihr Durchschnittspunkt derselbe bleibt, und auch die Lage der Elemente in den Strahlen sich nicht ändert; auch sieht man leicht,

---

*) Denn man hat den Ausdruck (2) nur nach $-ds$ zu differenziiren, um die Anziehung des Elementes ids zu finden; man erhält, statt r, $\cot\frac{1}{2}\alpha$, $d\alpha$ ihre Werthe

$$\frac{l}{\sin\alpha},\ \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \frac{lds}{r^2}$$

gesetzt, sogleich durch diese Differenziation den zu erweisenden Ausdruck:

$$\frac{ib_1\,ds}{r^2}\sin\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{ab_1}{r^2}\sin\alpha.$$

**) Da $\frac{\sin\alpha}{B} = \frac{\sin\varepsilon}{r}$ ist, siehe Fig. 2.

wie der Winkel beider Strahlen durch die Bewegung vermindert wird, wenn die Elemente beide dem Scheitelpunkte zu- oder von ihm abströmen, hingegen vermehrt, wenn das eine dem Scheitelpunkte sich zukehrt, das andere sich von ihm abwendet.

Hierdurch tritt die wahre Gegenseitigkeit in der Bewegung ans Licht, und man sieht wie diese gegenseitige Anziehung zweier † Linientheile eben so den Winkel zu vermindern trachtet bei konstantem Scheitelpunkte, wie die gegenseitige Anziehung zweier Punkte deren Entfernung bei konstanter Linie, in der sie liegen, zu vermindern trachtet. So zeigt sich hier, statt der erkünstelten und scheinbaren Analogie der Ampère'schen Annahme, eine naturgemässe und wahre Analogie, indem Linien und Punkte sich in der Ebene eben so einander entsprechen, wie Winkel und Entfernung, wie Durchschnittspunkt und umfassende Linie. 11

11) Diese Analogie tritt in ein noch helleres Licht, wenn ich zeige, wie die elektrodynamischen Anziehungen nach der neuen Theorie und die Anziehungen durch Gravitation sich durch *dieselbe* Formel ausdrücken lassen. Zu dem Ende muss ich jedoch hier den Begriff einer Verknüpfung anführen, welche ich in einem kürzlich erschienenen Werke*) dargelegt habe, und zwar ehe ich von dieser neuen Theorie eine Ahnung hatte.

Ich habe nämlich dort nachgewiesen, dass man als das Produkt zweier Punkte a und b ihre Verbindungsstrecke, und eben so als das Produkt zweier, mit bestimmten Intensitäten (Gewichten) behafteten Punkte die mit dem Produkte der Intensitäten multiplicirte Verbindungsstrecke ansehen *müsse*; hiernach würde, wenn α und β Punkte wären, $\alpha\beta$ die von α nach β gezogene Strecke, welche nicht bloss ihrer Grösse, sondern auch ihrer Richtung nach aufzufassen ist, vorstellen, und wenn etwa 2 und 3 die Intensitäten wären, und a gleich 2α, b gleich 3β wäre, so würde jene Strecke, ohne Aenderung ihrer Richtung, sechs Mal zu nehmen sein, um das Produkt ab darzustellen. Ich habe dort gezeigt, wie diess Produkt sich von dem arithmetischen dadurch unterscheide, dass, wie man sogleich sieht, $a.b$ gleich $-b.a$ ist.

Hiernach würde die Anziehung, welche ein Punkt a auf einen um r entfernten Punkt b durch Gravitation bei beliebigen Gewichten beider Punkte übt, proportional sein: 12

$$(6) \qquad \frac{a.b}{r^3},$$

*) Die Ausdehnungslehre. Erster Theil, enthaltend die lineale Ausdehnungslehre. Die angeführten Sätze finden sich S. 61, 164 und 222. {Ges. Werke I, 1, S. 90f., 189f., 243.}

ein Ausdruck, welcher, vermöge der so eben angegebenen Bedeutung, zugleich die Richtung der Anziehung in sich schliesst.

Ebenso habe ich dort gezeigt, dass der Flächenraum eines Parallegramms als Produkt zweier aneinanderstossenden Seiten a und b aufzufassen sei, wenn man an diesen Seiten zugleich ihre Richtung und Länge festhält, und dass auch hier $a \cdot b$ gleich $-b \cdot a$ sei, und ich habe dort gezeigt, dass, wenn an a und b zugleich die Linien, in denen sie liegen, festgehalten werden sollen, dann das Produkt den mit jenem Flächenraum zusammengeschauten Durchschnittspunkt beider Linien darstellt.

Nun ist der Zähler des Ausdruckes (5) offenbar der Ausdruck für den Flächenraum eines Parallelogramms, welches a und b mit Beibehaltung ihrer Richtungen zu Seiten hat. Somit geht, wenn man unter a und b die Stromelemente mit Feststellung der Linien, in welchen sie liegen, versteht, der Ausdruck (5) über in:

$$(6) \qquad \frac{a \cdot b}{r^2},$$

welcher identisch ist mit dem für die Anziehung durch Gravitation aufgestellten, und dessen Grösse die Grösse der Schwenkung ausdrückt, welche sich beide Elemente mitzutheilen streben, während der durch das Produkt $a \cdot b$ zugleich dargestellte Punkt das Schwenkungscentrum angiebt.

12) Diese Analogie haben wir nur nachgewiesen, wenn die Stromelemente sich verlängert schneiden. Hiervon ist nicht wesentlich abweichend der Fall, dass die Stromelemente parallel sind, indem diess so betrachtet werden kann, als ob ihre Verlängerungen sich in unendlicher Entfernung schnitten. Hingegen wird die Betrachtung schwieriger, 18 wenn die Stromelemente nicht derselben † Ebene angehören.

Für diesen Fall will ich nur anführen, dass sich die Bewegung zerlegen lässt in zwei Bewegungen der Linien, denen jene Elemente angehören, indem hier das gemeinschaftliche Loth beider Linien (ihre kürzeste Entfernung) die Stelle des Durchschnittspunktes vertritt. Die eine dieser Bewegungen besteht in einer Schwenkung um diess gemeinschaftliche Loth, welche wieder eine Verminderung oder Vergrösserung des Winkels beider Ströme bewirkt; die andere dieser Bewegungen besteht in einer Verminderung oder Vergrösserung jenes Lothes, welche dadurch bewirkt wird, dass jene Linien auf diesem Lothe fortrücken. In beiden Fällen ist die Bewegung eine gegenseitige, die Linien bleiben senkrecht gegen das gemeinschaftliche Loth, und die Stromelemente ändern ihre Lage innerhalb dieser Linie nicht.

Man sieht leicht, wie hier wiederum die vollkommenste Analogie

in der Art der Bewegung mit der durch Gravitation bewirkten stattfindet. Auch würde ich zeigen können, dass auch diese Bewegung sich durch den Ausdruck (6) darstellen lässt. Allein ich kann diesen Nachweis hier nicht führen, ohne die Gesetze einer Analyse zu entwickeln, welche zwar für die Physik von grosser Bedeutung ist, und oft die scheinbar verwickeltsten Verhältnisse in den einfachsten Formeln darstellt, welche aber doch sich nicht so in der Kürze darlegen lässt*).

13) Es bleibt mir nun noch übrig die Art anzugeben, wie durch Versuche eine Entscheidung zwischen beiden Theorien zu Wege gebracht werden könnte. Doch ehe ich dazu übergehe, will ich eines Versuches erwähnen, den man als beweisend gegen die neue Theorie ansehen könnte, dessen beweisende Kraft aber freilich bei genauerer Betrachtung gänzlich verschwindet.

Nämlich nach der neuen Theorie üben gleichgerichtete Stromtheile, welche in derselben geraden Linie liegen, (nach Formel (4)) [14] keine Wirkung auf einander aus, nach Ampère stossen sie sich ab. Nun hat man diess letztere durch Versuche beweisen wollen, indem man einen geschlossenen Strom, in der Gestalt eines Rechteckes, partiell in der Art beweglich gemacht hat, dass durch die Bewegung eine Verlängerung des einen Seitenpaares entsteht, woraus man dann, ohne das andere Seitenpaar zu berücksichtigen, auf eine sich gegenseitig abstossende Kraft derjenigen Stromtheile geschlossen hat, welche hier, in denselben Linien liegend, sich von einander entfernen.

Um die Unrichtigkeit dieses Schlusses zu zeigen, brauche ich hier nur auf die obige Entwicklung hinzuweisen, nach welcher beide Theorien, auf geschlossene Ströme angewandt, mögen nun Theile derselben beweglich gemacht sein oder nicht, stets gleiches Resultat liefern. Ueberdiess ist für diesen Fall noch zu bemerken, dass bei dem Uebergange eines Stromes aus einem Leiter in einen andern eigenthümliche Kräfte wirksam sind, welche, wenn beide in gerader Linie liegen, in dieser Linie wirken, deren Natur und Wirkungsart wir aber noch nicht kennen.

14) Ueberhaupt ist klar, dass eine Entscheidung zwischen beiden Theorien, da die Wirkung, welche geschlossene Ströme üben, nach beiden dieselbe ist, nur möglich ist, wenn man die Wirkung betrachtet, welche ein begränzter Strom übt.

Nun ist aber die Stärke der Strömung bei demselben Leitungswiderstande der Differenz der an seinen Gränzen aufgehäuften Elektri-

---

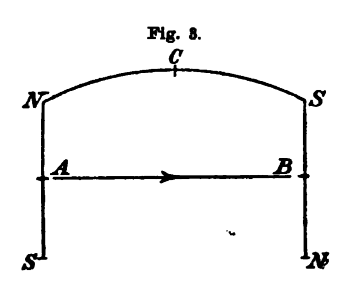
*) Ich verweise in dieser Beziehung auf mein oben angeführtes Werk, in welchem ich die Anwendungen auf die Physik besonders hervorgehoben habe.

citäten proportional*). Soll aber der Strom ein begränzter sein, so dürfen die nach seinen Gränzen A und B übergeströmten Elektricitäten
15 nicht weiter fortschreiten, weil † sonst A und B nicht die Gränzen des Stromes wären. Folglich wird die Strömung nur so lange fortdauern, bis jene Differenz ausgeglichen ist, und das Quantum der hindurchgegangenen Elektricität wird der elektrischen Differenz jener Gränzen gleich sein. Daraus folgt, dass man das Maximum des Effekts erhält, wenn jene Differenz ein Maximum ist.

Der begränzte Strom würde daher so hervorzurufen sein, dass man zuerst etwa zwei Kugeln mit entgegengesetzter Elektricität möglichst stark lüde, und sie dann nach der Ladung (nicht während derselben) in leitende Verbindung brächte. Dann hätte man die Wirkung dieses begränzten Stromes auf irgend einen elektrischen Strom oder besser auf einen Magneten zu beobachten, und die Anordnung dabei so zu treffen, dass die Wirkungen nach beiden Theorien möglichst verschieden erfolgten.

15) Da durch einen eingeschalteten Multiplikator oder durch Anwendung einer Batterie, statt jener einfachen Entladung, der begränzte Strom einem geschlossenen angenähert, die Differenz der Wirkungen nach beiden Theorien also vermindert werden würde, so sind diese Mittel zur Verstärkung der Wirkungen hier nicht anwendbar, und man sieht daher die Schwierigkeiten, welchen Versuche dieser Art unterliegen würden. Da indessen diese Schwierigkeiten nicht an sich unüberwindliche sind, so wird es dennoch von Interesse sein, diejenige Anordnung zu kennen, bei welcher ein Maximum in der Differenz der Wirkungen nach beiden Theorien erfolgte.

Fig. 3.



Dies Maximum findet nun, nach meinen Untersuchungen, dann statt, wenn die Magnetnadel senkrecht gegen den geradlinigten Strom so aufgestellt wird, dass ihre Mitte in der Verlängerung jenes Stromes liegt, und sich senkrecht gegen die durch den Strom und die Nadel gelegte Ebene frei bewegen kann. Zur Erläuterung diene Figur 3, in welcher AB den begränzten Strom
16 vorstellt, so dass die positive Elektricität von † A nach B strömt, und wo zwei Magneten, deren Nordenden mit N bezeichnet sind, durch

*) Dies gilt sowohl für jeden Leitungsdraht eines galvanischen Stromes, wie für den durch Reibungselektricität hervorgebrachten, nur dass dort sich die elektrische Differenz stets auf derselben Höhe erhält. Aus diesem Gesetze lässt sich übrigens das Ohm'sche Gesetz *a priori* ableiten.

einen Bogen SCN aus einer festen Substanz verbunden sind, welcher in C an einem Faden aufgehängt ist.

16) Setzen wir, um für diesen Fall die Wirkungen, welche der begränzte Strom nach beiden Theorien zunächst auf unendlich kleine Magneten üben würde, zu finden, statt des Magneten NS einen dagegen senkrechten quadratischen Strom, welcher mit AB in gleicher Ebene liegt, und von dessen vier Seiten zwei mit AB parallel, die andern also dagegen senkrecht sind, und zwar so, dass das Nordende des Magneten von diesem Strome aus betrachtet nach links hin liegt, so ist nach beiden Theorien die Bewegung nach der gegen AB senkrechten Richtung nur von den mit AB parallelen Stromtheilen abhängig.

Ist nun ids ein Stromelement von AB und b das mit AB gleichgerichtete, b' das mit ihm entgegengesetzt gerichtete Stromelement des quadratischen Stromes, so ist, wenn r die Entfernung ihrer Mitten von der Mitte des anziehenden Elementes ids ist, die Wirkung auf b nach der dagegen senkrechten Richtung abstossend gleich $idsb^2 : 2r^3$ *), und eben so die auf b', nur dass diese anziehend wirkt; beide Wirkungen, da sie die Bewegung des Quadrates von b' nach b darstellen, summiren sich, und geben $idsb^2 : r^3$ als die Kraft, mit welcher, nach Ampère, der quadratische Strom in der Richtung von b' nach b getrieben wird.

Nach meiner Formel ist die † Wirkung auf b nach der dagegen senkrechten Richtung gleich $idsb^2 : 2r^3$ anziehend **), auf b' eben so gross, aber abstossend, also wirken beide zusammen zur Bewegung des Quadrates in der Richtung von b nach b' mit der Kraft $idsb^2 : r^3$. 17

Somit sind die Wirkungen nach beiden Theorien entgegengesetzt; und diese Beziehung wird auch bestehen bleiben, wenn man statt des unendlich kleinen Stromelementes ids und eines unendlich kleinen

---

) Nämlich nach (1) ist sie in der Richtung r gleich

$$\frac{idsb}{r^2}(2 - 3\cos^2\alpha),$$

also in der gegen b senkrechten gleich

$$\frac{idsb}{r^2}(2 - 3\cos^2\alpha)\sin\alpha,$$

also da α unendlich klein, $\sin\alpha$ gleich $\frac{\frac{1}{2}b}{r}$ ist, gleich $-\frac{idsb^2}{2r^3}$, also abstossend.

**) Nämlich sie ist gleich

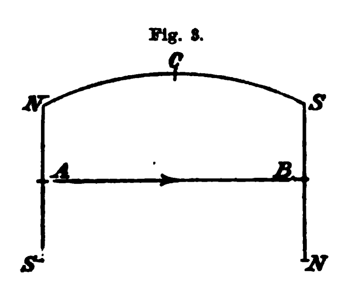
$$\frac{idsb}{r^2}\sin\alpha,$$

also, da $\sin\alpha$ gleich $\frac{\frac{1}{2}b}{r}$ ist, gleich dem oben angeführten Ausdrucke und zwar anziehend.

Magneten einen endlichen Strom AB und einen endlichen Magneten setzt, nur dass in dem letzteren Falle die Wirkungen nicht mehr von gleicher Grösse sind. Die Wirkungen lassen sich auf folgende Weise ausdrücken:

Wenn man sich bei der angenommenen Anordnung (Fig. 3) in die Richtung der Magnetnadel versetzt (den Kopf nach dem Nordende, die Füsse nach dem Südende gerichtet) und das Auge nach derjenigen Richtung wendet, nach welcher der positive Strom AB fliesst, so wird die Nadel, nach der Ampère'schen Theorie, nach der rechten Hand hin, nach der neuen Theorie nach der linken Hand hin bewegt.

Fig. 3.



17) Schliesslich will ich noch auf zwei sehr unwahrscheinliche Wirkungen hindeuten, welche ein begränzter Strom, nach Ampère, auf einen Magneten üben müsste; nämlich erstens würde danach ein Magnet durch einen begränzten Strom zugleich eine drehende Bewegung um seine magnetische Axe annehmen, welche in dem vorher (Nr. 16) betrachteten Falle ihr Maximum erreicht; und zweitens würde eine Magnetnadel, welche um ihren Mittelpunkt frei beweglich ist, in der Nähe eines begränztes Stromes, sofern nur dieser auf sie wirkt, im 18 Allgemeinen keine Lage eines sicheren Gleichgewichts † annehmen, sondern bei der Entfernung aus der Gleichgewichtslage würde sie theils wieder zurückgehen, theils aber auch in die entgegengesetzte Lage umschlagen, je nachdem sie nach dieser oder jener Seite hin aus jener Lage entfernt war.

18) Wenn ich nun gleich hoffen darf, durch die vorhergehende Entwicklung die neue Theorie als in jeder Hinsicht wahrscheinlich dargethan zu haben, so steht doch zu wünschen, dass durch die Erfahrung eine über alle Zweifel erhobene Entscheidung zwischen dieser und der Ampère'schen Annahme zu Stande gebracht werde. Möchte es bald einem geübteren Physiker gelingen, alle die Hindernisse hinwegzuräumen, welche jenem entscheidenden Versuche, den ich vorher anführte, im Wege zu stehen scheinen.

III. Zur Theorie der Farbenmischung. 69

Von

Hermann Grassmann, Professor in Stettin.

Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, Bd. 89, Erstes Stück, S. 69—84
(geschlossen 7. Mai 1853).

Im 87. Bande dieses Journals theilt Hr. Helmholtz eine Reihe zum Theil neuer und sinnreicher Beobachtungen mit, aus welchen er den Schluss zieht, dass die seit Newton allgemein angenommene Theorie der Farbenmischung in den wesentlichsten Punkten irrig sei, und es namentlich nur zwei prismatische Farben gebe, nämlich Gelb und Indigo, welche vermischt Weiss liefern. Daher möchte es nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie die Newton'sche Theorie der Farbenmischung bis zu einem gewissen Punkte hin, und namentlich der Satz, dass jede Farbe ihre Complementarfarbe hat, welche mit ihr vermischt Weiss liefert, aus unbestreitbaren Thatsachen mit mathematischer Evidenz hervorgeht, so dass dieser Satz als einer der wohlbegründetsten in der Physik angesehen werden muss. Ich werde dann zeigen, wie die von Helmholtz angestellten *positiven* Beobachtungen, statt gegen diese Theorie zu zeugen, vielmehr dazu dienen können, dieselbe theils zu bestätigen, theils zu ergänzen.

Hierbei wird es nöthig sein, den Farbeneindruck, dessen das Auge fähig ist, in seine Momente zu zerlegen.

Zunächst unterscheidet das Auge farbloses und farbiges Licht. An dem farblosen Lichte (Weiss, Grau) unterscheidet es nur die grössere oder geringere *Intensität*, und diese lässt sich mathematisch bestimmen. Ebenso unterscheiden † wir an einer homogenen Farbe nur ihre grössere 70 oder geringere Intensität. Aber auch für die Verschiedenheit der einzelnen homogenen Farben haben wir ein mathematisch bestimmbares Maass, welches uns am vollkommensten in der jeder Farbe entsprechenden Schwingungsdauer geboten wird: schon die populäre Sprache hat

diese Differenz auf eine sehr passende Weise durch den Ausdruck *Farbenton* bezeichnet. Wir werden also an einer homogenen Farbe zweierlei: ihren Farbenton und ihre Intensität unterscheiden können.

Vermischt man nun eine homogene Farbe mit farblosem Lichte, so wird der Farbeneindruck durch diese Beimischung abgeschwächt. Die populäre Sprache ist reich an Bezeichnungen, welche diese Differenz bezeichnen sollen; die Bestimmungen: gesättigt, tief, blass, fahl, matt, weisslich, welche man den Farbennamen hinzufügt, sollen dies Verhältniss darstellen. Die wissenschaftliche Bezeichnung, welche dieser populären Nomenklatur substituirt werden muss, ergiebt sich aus dem Obigen von selbst, indem jeder Farbeneindruck der genannten Art sich in drei mathematisch bestimmbare Momente zerlegt: den *Farbenton*, die *Intensität der Farbe*, und die *Intensität des beigemischten Weiss*.

Die verschiedenen Farbentöne bilden eine stetige Reihe von der Art, dass sich, wenn man von einer Farbe dieser Reihe aus in ihr stetig fortschreitet, zuletzt die ursprüngliche Farbe wiederholt. Hierbei darf jedoch ein Umstand nicht unerwähnt gelassen werden, nämlich die Schwierigkeit, sich homogenes rothes Licht zu verschaffen, welches den Uebergang zwischen dem Violett und Roth des gewöhnlichen Sonnenspectrums vermittelt, und welches man durch das Prisma nur unter besonders günstigen Umständen (an heiteren Sommermittagen) hervorbringen kann (s. Pogg. Ann. Bd. 23, S. 441). Ich werde diese äusserste Farbe des Spectrums, welche ebenso wohl als äusserstes Roth, wie als äusserstes Violett aufgefasst werden kann, Purpur nennen.

Betrachten wir nun endlich ein beliebig zusammengesetztes Licht, so kann das Auge an ihm gleichfalls nur die angeführten drei Momente 71 unterscheiden, † das heisst, es lässt sich jeder Lichteindruck nachahmen, indem man eine homogene Farbe von bestimmter Intensität mit farblosem Lichte von bestimmter Intensität vermischt.

Hiernach haben wir also bei jedem Lichteindruck Dreierlei zu unterscheiden: die Intensität der Farbe, den Farbenton, die Intensität des beigemischten farblosen Lichtes. Es würde sich leicht ein Apparat anfertigen lassen, vermittelst dessen man im Stande wäre, jede Farbe nach diesen drei Momenten zu bestimmen.

Um hiervon eine Idee zu geben, denke man sich zwei weisse Tafeln von gleicher Beschaffenheit um ein Charnier beweglich, und zwar so, dass die weisse Seite der Tafeln auf der Aussenseite des von den Tafeln gebildeten Winkels sich befinde, und zugleich sei ein getheilter Kreis vorhanden, um diesen Winkel zu messen. Nun lasse man in einer auf der Drehungsaxe senkrechten Ebene auf die eine dieser Tafeln das zu prüfende farbige Licht fallen; auf die andere

Tafel falle in einer beliebigen Richtung jener Ebene weisses Licht und in einer dagegen senkrechten Richtung derselben Ebene homogenes Licht auf, und zwar sei das letztere so gewählt, dass es denselben Farbenton habe, wie das zu prüfende Licht. Indem man nun diese letztere Tafel um das Charnier dreht, wird man dem farblosen und dem homogenen Lichte, welches von dieser Tafel nach allen Seiten hin zerstreut wird, jedes beliebige Intensitätsverhältniss geben können. Indem man darauf die erstere Tafel gleichfalls dreht, wird man dem von ihr zerstreuten Lichte jeden Grad der Intensität geben können, welcher geringer ist als die Intensität bei senkrecht auffallendem Lichte. Auf diese Weise wird man, wenn man nur die auf die zweite Tafel fallenden Vergleichungslichter hinreichend schwach genommen hat, nothwendig eine Stellung der Tafeln finden, bei welcher beide auf ein sie zugleich sehendes Auge gleichen Lichteindruck machen. Es würde also ein solcher Apparat ausreichen, um alle in Betracht kommenden Momente mathematisch zu bestimmen.

Nun könnte freilich der obige Satz, dass das Auge direkt nur diese drei Momente zu unterscheiden vermöge, in Zweifel gezogen werden. Und allerdings † möchte ein direkter Beweis schwer zu führen 72 sein, da noch immer die Möglichkeit bleibt, dass ein Auge vermöge seiner besondern Organisation vielleicht Unterschiede entdecken möchte, die ein anderes nicht zu entdecken vermag. Jedoch genügt für unsern Zweck die Thatsache vollkommen, dass bisher kein Beobachter ein anderes Moment, was den Farbeneindruck bestimmte, anzugeben vermochte, und auch die Sprache in der Beschreibung der Farbeneindrücke nur diese drei Momente kennt, so dass wir also mit Bestimmtheit behaupten können, es seien bisher nur diese drei Momente des Farbeneindrucks beobachtet worden; und nur auf diese Behauptung werden wir bei dem unten zu erwähnenden Beweise zurückgehen.

Das zweite, was wir voraussetzen, ist: *dass, wenn man von den beiden zu vermischenden Lichtern das eine stetig ändert* (*während das andere unverändert bleibt*), *auch der Eindruck der Mischung sich stetig ändert.*

Wir sagen nämlich, ein Lichteindruck ändere sich stetig, wenn die beiden Intensitäten (die Intensität der Farbe und die des beigemischten farblosen Lichtes) sich stetig ändern und auch der Farbenton, vorausgesetzt, dass die Intensität der Farbe nicht Null ist, sich stetig ändere. Ist nämlich die Intensität der Farbe Null, so ist das Licht eben ein farbloses; und es kann daher ein Farbenton dadurch, dass die Intensität der Farbe stetig bis Null hin abnimmt, in jeden andern, von ihm gänzlich getrennt liegenden Farbenton stetig übergehen, wenn nämlich die Intensität des letzteren wiederum von Null ab stetig wächst.

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass der Fall, wo eins oder mehrere der den Eindruck bestimmenden Momente sich gleich bleiben, mit unter den Begriff der Stetigkeit gefasst werden muss, wie diess ja überall üblich ist.

Was nun die stetige Aenderung des Farbentones betrifft, so wird dieselbe im Allgemeinen durch die stetige Aenderung der diesen Farbenton bestimmenden Schwingungsdauer dargestellt werden, jedoch mit dem Unterschiede, dass der Farbeneindruck des äussersten Violett sich 73 wieder an den des äussersten Roth † stetig anschliesst. In der That ist der Uebergang von Violett durch Purpur zum Roth für das Auge ein ebenso stetiger, wie zwischen irgend welchen zwei anderen Farben, wenngleich durch Beobachtungen noch keineswegs die Gränze mit Sicherheit festgestellt ist, an welcher derselbe Farbeneindruck bei verschiedener Schwingungsdauer wiederkehrt. Ich werde den Uebergang vom Roth zum Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett, Purpur zurück zum Roth den *positiven* Uebergang, den umgekehrten den *negativen* nennen. Hiernach kann also jedes gefärbte Licht A in ein anders gefärbtes Licht B auf drei verschiedene Arten stetig übergehen, nämlich entweder so, dass der Farbenton des Lichtes nach und nach alle Farbentöne annimmt, die auf dem positiven Uebergange von A zu B liegen, oder alle die auf dem negativen Uebergange liegen, oder endlich, dass das Licht beim Uebergange einmal oder mehrere Male farblos wird.

Der Satz des stetigen Ueberganges, den wir so eben entwickelt haben, muss als ein durch die Erfahrung vollkommen begründeter angesehen werden, da ein unvermittelter Sprung in den Erscheinungen sich auch bei den rohesten Beobachtungen kenntlich machen muss, und ein solcher Sprung bisher von Niemand beobachtet worden ist.

Aus diesen Voraussetzungen nun lässt sich der folgende Satz mit mathematischer Evidenz ableiten:

„Es giebt zu jeder Farbe eine andere homogene Farbe, welche, mit ihr vermischt, farbloses Licht liefert."

Beweis. Es sei a der Farbenton der gegebenen Farbe. Angenommen nun, es gebe keine homogene Farbe, die mit ihr vermischt farbloses Licht liefere, so sei eine beliebige homogene Farbe angenommen, deren Farbenton x und deren Intensität y sei. Lässt man nun zuerst, während x konstant bleibt, y stetig von Null ab wachsen, bis die Intensität der Farbe a gegen sie verschwindet, so wird die Mischung sich stetig ändern, und da sie nach der Annahme nie farbloses Licht geben soll, wird auch ihr Farbenton sich stetig ändern, 74 also, da die Mischung anfangs den Farbenton † a, zuletzt den Farbenton x hat, stetig von a nach x hin übergehen. Dieser Uebergang

kann ein positiver oder negativer sein. Ob das eine oder das andere der Fall sei, wird von dem Farbenton x abhängen.

Nimmt man den Farbenton x von a unendlich wenig verschieden an, aber nach der positiven Uebergangsseite hin, so wird jener Uebergang gleichfalls positiv sein. Denn gesetzt er wäre negativ, so müssten bei der Steigerung der Intensität y alle Farbentöne ausser den von a unendlich wenig verschiedenen hervortreten, also Farbentöne, welche von a ganz verschieden sind; es sei y eine solche Intensität, bei welcher ein von a ganz verschiedener Farbenton hervortrete. Nun ist klar, dass die Farbe, deren Farbenton a und deren Intensität y ist, mit a vermischt, den Farbenton a giebt, während die Farbe, deren Farbenton x und deren Intensität y ist, einen ganz verschiedenen Farbenton liefert; aber diese beiden mit a vermischten Farben haben bei gleicher Intensität y zwei unendlich nahe aneinandergränzende Farbentöne, das heisst, jene beiden mit a vermischten Farben gehen stetig in einander über, also muss auch (nach dem zweiten Satze) die Mischung stetig sich ändern, also auch ihr Farbenton; dieser sollte aber ein ganz verschiedener sein. Also führt die Annahme, dass der Uebergang von a nach x ein negativer sein soll, zu Widersprüchen das heisst, er ist nothwendig ein positiver.

Aus demselben Grunde wird, wenn x von a aus nach der negativen Seite hin unendlich wenig entfernt liegt, ein negativer Uebergang von a nach x stattfinden.

Lässt man nun den Farbenton x von a aus nach positiver Seite hin stetig sich ändern, so dass er die ganze Farbenreihe bis nach a hin zurück durchläuft, so muss der zugehörige Uebergang der Mischung, welcher jedesmal durch die Steigerung des y bewirkt wird, nothwendig, da er zuerst positiv, zuletzt negativ ist, irgend wo sein Zeichen ändern. Es sei a' ein Farbenton, bei dem diese Aenderung eintritt, so dass also jener Uebergang, ehe x diesen Farbenton erreicht, positiv ist, sobald es ihn überstiegen hat, negativ ist. Wenn nun der Farbenton x durch diesen Farbenton a' stetig hindurchgeht, so muss bei jedem 75 Werth der Intensität y der Farbenton der Mischung sich stetig ändern, also die sämmtlichen Farbentöne, welche durch Steigerung der Intensität y entstehen, in beiden Fällen (wenn x unendlich nahe neben a' einmal zur Rechten und einmal zur Linken liegt), unendlich nahe aneinander liegen. Dies ist aber unmöglich, da die einen auf dem positiven, die anderen auf dem negativen Uebergange von a zu a' liegen.

Also führt die Annahme, dass es zu a keine homogene Farbe gebe, die mit ihr vermischt Weiss liefere, zu einem Widerspruche, das

heisst, zu jeder Farbe giebt es eine homogene Farbe, die mit ihr vermischt Weiss liefert. *q. d. e.*

Die indirekte Form des Beweises habe ich gewählt, weil in ihr sich am leichtesten ohne Umschweife die möglichste Strenge erreichen lässt. Uebrigens leuchtet ein, dass in dieser indirekten Beweisform zugleich die direkte Behauptung liegt, dass die Farbe a', bei welcher die Art des Ueberganges sich ändert, diejenige sei, welche in irgend einem Intensitätsverhältniss mit a vermischt farbloses Licht geben muss.

Prüfen wir nun die Helmholtz'schen Versuche, so ergiebt sich aus ihnen, wenigstens annähernd, diejenige Farbe, welche mit einer gegebenen farbloses Licht zu liefern vermag. Für Gelb ist dies nach Helmholtz Indigo, ein Resultat, was von der Newton'schen Theorie der Farbenmischung keinesweges so abweichend ist, wie es für den ersten Augenblick scheint. Helmholtz hat die beiden Farben, welche nach ihm Weiss geben, genauer bestimmt; indem das Gelb zwischen den Fraunhofer'schen Linien D und E liegt, und zwar etwa dreimal so weit von E entfernt als von D, das Indigo hingegen von der Mitte zwischen den Linien J und G bis gegen G hin liegt, nämlich so, dass jedes Indigo, welches zwischen den genannten Gränzen liegt, mit irgend einem Gelb, was in der Nähe der bezeichneten Stelle liegt, Weiss liefert.

Der Vergleich mit der Newton'schen Regel der Farbenmischung wird dadurch erschwert, dass die Farbennamen bei den verschiedenen 76 Beobachtern nicht denselben Inhalt haben, wie man sich † davon sehr leicht überzeugt, wenn man die Beschreibung der Farben, welche zwischen den verschiedenen Fraunhofer'schen Linien liegen sollen, in den verschiedenen Lehrbüchern und Abhandlungen vergleicht.

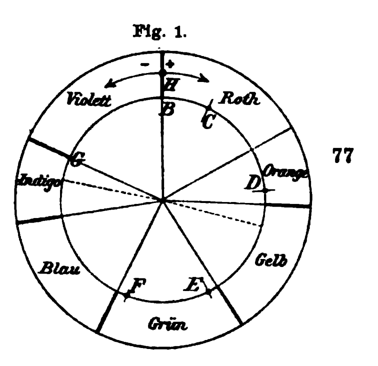
Newton beschreibt die Lage der Gränzen zwischen je zweien seiner Farben, wie sie sich in dem Spectrum seines Glases zeigten, genau; er bestimmt auch das mittlere Brechungsverhältniss und das Zerstreuungsverhältniss dieses Glases, so dass alle Elemente vorliegen, um die Lage der Newton'schen Farbengränzen zwischen den Fraunhofer'schen Linien so genau zu bestimmen, als eben jene Newton'schen Bestimmungen selbst reichen. Nach diesem Princip habe ich durch Vergleichung der Fraunhofer'schen und Newton'schen Messungen, indem ich annahm, dass Newtons Anfangsroth und sein End-Violett mit den Fraunhofer'schen Linien B und H zusammenfallen, gefunden, dass Newtons Anfangs-Orange (das heisst die Gränze zwischen Roth und Orange) zwischen den Linien C und D, von C und D im Verhältniss von $7:6$ entfernt liegt, sein Anfangs-Gelb liegt bei D (um $\frac{1}{11}$ des Intervalles DE von D aus nach E hin entfernt), sein Anfangs-Grün

liegt bei E (von E um $\frac{1}{11}$ ED nach D zu entfernt), sein Anfangs-Blau bei F (von F um $\frac{1}{14}$ FG nach G zu entfernt), sein Anfangs-Indigo zwischen F und G, im Verhältniss 5 : 3 von F und G entfernt, sein Anfangs-Violett in G.

Es hat zwar die Annahme, dass die Gränzen des Newton'schen Spectrums mit den Linien B und H zusammenfallen, etwas willkürliches; doch gelangt man auch zu demselben Resultat, wenn man davon ausgeht, dass die Farben, welche die mittlere Brechbarkeit haben, bei Fraunhofer und Newton zusammenfallen.

Konstruirt man nun den Newton'schen Farbenkreis nach der in seiner Optik (*Liber I, pars II, prop. VI*) angegebenen Regel, und trägt in ihn die Lagen der Fraunhofer'schen Linien, wie sie oben angegeben wurden, hinein (s. Fig. 1), so ergiebt sich, dass das von Helmholtz bestimmte Gelb nach der Newton'schen Regel Weiss giebt mit einem Indigo, welches zwischen den Fraunhofer'schen Linien F und G liegt, † und welches von F und G in dem Verhältniss von 15 : 2 absteht. In der Figur sind diese Farben durch die punktirte Linie, welche sie verbindet, angedeutet. Es fällt also diess Indigo noch innerhalb der Farbengränzen, zwischen denen die Complementarfarben des Gelb nach Helmholtz liegen. Man sieht also, dass die angeführte Beobachtung von Helmholtz mit dem Resultat der Newton'schen Versuche im Wesentlichen übereinstimmt.

Fig. 1.



77

Für die übrigen Farben leugnet nun allerdings Hr. Helmholtz die Möglichkeit, aus ihnen durch Vermischung zweier Farben Weiss zu erhalten. Aber prüfen wir irgend eine seiner Versuchsreihen, zum Beispiel die über die Mischung des Roth mit den übrigen Farben, so ergiebt sich daraus jedesmal die Complementarfarbe leicht. Nach ihm giebt nämlich Roth mit Orange, Gelb, Grün die mittleren Farbentöne, welche in dieser Reihe, also nach unserer Bezeichnung vom Roth aus nach der positiven Seite liegen. So zum Beispiel giebt nach ihm Roth mit Grün vermischt ein *fahles* Gelb, welches bei vorwaltendem Roth durch Orange in Roth, bei vorwaltendem Grün durch Gelbgrün in Grün übergeht. Ebenso giebt Roth mit Violett, Indigblau, Himmelblau die in dieser Reihe dazwischen liegenden Farbentöne, welche also nach unserer Bezeichnung vom Roth aus nach der negativen Seite liegen. Namentlich giebt nach ihm Roth mit Himmelblau vermischt ein *weissliches* Violett, welches bei überwiegendem Roth in Rosaroth

und Carminroth übergeht. Es muss also nach dem oben erwiesenen Satze die Complementarfarbe des Roth zwischen Grün und Himmelblau liegen, also irgend ein Farbenton des Blaugrünen sein.

Nun sagt zwar Helmholtz, dass bei der Mischung des Roth mit den grünblauen Tönen eine fleischfarbene Mischung hervorgeht; allein, wie diese Fleischfarbe bei überwiegendem Blaugrün in dieses übergeht, wie es doch der Fall sein muss, wird nicht gesagt. Es bleibt hier also eine Lücke. Ueberdies ist Fleischfarbe nichts anderes, als ein mit vielem Weiss gemischtes Roth, und es ist kein anderer Uebergang desselben in das Blaugrüne denkbar, als der, dass sich das Roth immer 78 mehr † abschwächt, bis es unter dem beigemischten Weiss verschwindet, und dann aus diesem Weiss (oder Grau) nach und nach das Blaugrün hervortritt; kurz, es findet hier der normale Uebergang durch farbloses Licht hindurch statt. Dasselbe gilt für die übrigen Versuchsreihen. Die aus ihnen abgeleitete Tafel der Complementarfarben würde folgende sein:

Gelb,	Gelbgrün,	Grün,	Grünblau,	Himmelblau,	Indigo,
Indigo,	Violett,	Purpur,	Roth,	Orange,	Gelb,

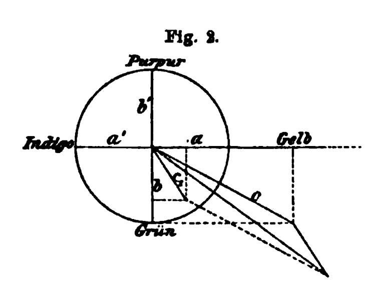
wo die zusammengehörigen Complementarfarben untereinander stehen.

Ich habe bisher versucht, mit möglichst wenigen Voraussetzungen auszureichen. Ich werde jetzt, um den Hauptsatz der Farbenmischung abzuleiten, noch zu den bisherigen beiden Voraussetzungen eine dritte hinzufügen, nämlich die:

dass zwei Farben, deren jede constanten Farbenton, constante Farbenintensität und constante Intensität des beigemischten Weiss hat, auch constante Farbenmischung geben, gleich viel aus welchen homogenen Farben jene zusammengesetzt seien.

Auch diese Voraussetzung scheint durch die bisherigen Beobachtungen hinreichend gerechtfertigt zu sein. Denn dass die farbigen Pulver vermischt andere Resultate geben, als wenn man, statt sie selbst zu vermischen, das von ihnen ausgehende Licht vermischt, kann keinen Einwand abgeben, zumal da der Grund dieser Abweichung durch Helmholtz aufgedeckt ist.

Fig. 2.



Es sei nun a eine homogene Farbe, und a' diejenige homogene Farbe, welche mit a gemischt Weiss giebt. Der Anschaulichkeit wegen denke man sich a und a' dargestellt durch zwei gleich lange aber entgegengesetzt gerichtete Strecken (Fig. 2), die von Einem Punkte ausgehen. Es sei ferner b eine Farbe, welche mit a gemischt eben

so viel Weiss liefert, wie mit a' gemischt; und um diese gleiche Beziehung von b zu a und zu a' auszudrücken, sei b durch eine gegen a und a' senkrechte Strecke dargestellt. Ferner † sei die Intensität 79 der Farbe b so gewählt, dass, wenn b' die Farbe ist, die mit b Weiss giebt, die Intensität des durch diese Mischung entstandenen Lichtes gleich der Intensität des durch die Mischung von a und a' entstandenen Lichtes sei. Dies sei bildlich dadurch dargestellt, dass man die Strecke, welche die Farbe b ausdrückt, gleich lang macht mit a und a', während die Complementarfarbe von b, durch die mit b gleich lange aber entgegengesetzt gerichtete Strecke b' dargestellt sei.

Wir wollen annehmen, dass von den beiden Farben b und b' die Farbe b diejenige sei, welche von a aus nach der positiven Uebergangsseite liegt. Es leuchtet ein, dass wenn die Farbe a gegeben ist, dann a', b, b' durch Beobachtung zu finden sind. Ist zum Beispiel a Gelb, so ist a' Indigo; auf dem positiven Uebergange von a zu a' liegen die verschiedenen Töne des Grünen und Blauen; das Grüngelb wird mit Gelb (a) vermischt eine sehr geringe, mit Indigo (a') vermischt eine sehr bedeutende Beimischung des Weiss geben. Schreitet man vom Grüngelb nach der positiven Seite zu fort, so wird bei der Vermischung mit Gelb die Beimischung des Weiss nach und nach zunehmen, bei der Vermischung mit Indigo abnehmen. Es wird also auf dem Uebergange ein Farbenton liegen, welcher mit dem Gelb vermischt, ebenso viel Weiss liefert, wie mit Indigo vermischt. Es sei dies etwa Grün, so wird b Grün und b' Purpur sein.

Es leuchtet nun ein, dass man durch Vermischung von je zweien dieser vier Farben alle Farbentöne erhalten muss. Es seien diese Farbentöne für alle Intensitätsverhältnisse der zu mischenden homogenen Farben a und b, b und a', a' und b', b' und a durch Beobachtungen gefunden. Wir nehmen an, es seien die Intensitäten der beiden zu mischenden Farben durch die Längen der zugehörigen Strecken dargestellt, so dass, wenn die eine Farbe zum Beispiel den Farbenton a hat, und die Intensität derselben sich zu der von a wie m zu 1 verhält, dann jene Farbe durch eine Strecke dargestellt sei, welche mit a gleiche Richtung, aber die m-fache Länge hat. Nachdem man so die beiden zu mischenden Farben † geometrisch dargestellt hat, construire 80 man aus diesen Strecken *die geometrische Summe*, das heisst die Diagonale des Parallelogramms, welches die beiden Strecken zu Seiten hat*), und setze fest, dass diese Summe oder Diagonale die Farbe der

*) Der Begriff dieser geometrischen Summe ist von mir in meiner Ausdehnungslehre (Leipzig 1844 {Ges. Werke I, 1}) und von Möbius in seiner Mechanik des Himmels (Leipzig 1843 {Ges. Werke Bd. 4}) zuerst entwickelt.

Mischung darstellen soll, nämlich ihre Richtung den Farbenton und ihre Länge die Intensität der Farbe.

Ist diess geschehen, so kann man von jetzt an den Farbenton, und die Farbenintensität jeder Mischung von Farben durch blosse Construktion finden. Nämlich man braucht nur die Strecken, welche den Farbenton und die Farbenintensität der zu mischenden Farben darstellen, zu bestimmen, und diese dann geometrisch zu addiren, das heisst, wie Kräfte zusammenzusetzen, so stellt die geometrische Summe (die Resultante jener Kräfte) den Farbenton und die Farbenintensität der Mischung dar. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass die Ordnung, in welcher man geometrisch addirt (die Kräfte zusammensetzt), gleichgültig ist für das Resultat.

In der That, es seien die durch die Strecken a, b, a', b' gemäss der obigen Bestimmung dargestellten Farben zu Grunde gelegt, und sei unter αa, wenn α positiv ist, eine Farbe verstanden, die den Farbenton a hat, und deren Farbenintensität sich zu der von a verhält wie α zu 1, und wenn α negativ ist, sei unter αa eine Farbe verstanden, die den Farbenton der Complementarfarbe a' besitzt, und deren Farbenintensität sich zu der von a' wiederum wie α zu 1 verhalte. Dasselbe gelte in Bezug auf die zweite zu Grunde gelegte Farbe b und deren Complementarfarbe b'. Von den beiden Farben c und c_1, deren Mischungsfarbe man sucht, sei die eine darstellbar durch die Mischung der Farben αa und βb, die andere durch die Mischung der Farben $\alpha_1 a$ und $\beta_1 b$, so ist (immer abgesehen vom beigemischten Weiss) die Mischung von c und c_1 darstellbar durch die 81 Vermischung der vier Farben αa, βb, † $\alpha_1 a$, $\beta_1 b$. Aber αa giebt mit $\alpha_1 a$ vermischt $(\alpha + \alpha_1) a$ und βb mit $\beta_1 b$ vermischt $(\beta + \beta_1) b$. Also ist die Mischung von c und c_1 auch darstellbar durch die Mischung der beiden Farben $(\alpha + \alpha_1) a$ und $(\beta + \beta_1) b$. Da diese letzteren aber die zu Grunde gelegten Farbentöne a, b oder a', b' haben, so wird ihre Mischung dargestellt durch die geometrische Summe der Strecken, also durch die Strecke

$$(\alpha + \alpha_1) a + (\beta + \beta_1) b,$$

das heisst durch

$$(\alpha a + \beta b) + (\alpha_1 a + \beta_1 b),$$

das heisst durch die geometrische Summe zweier Strecken, welche einzeln genommen, die zu vermischenden Farben darstellen.

Wir können diess Gesetz, welches aus den drei zu Grunde gelegten Voraussetzungen mit Nothwendigkeit folgt, und welches zur Bestimmung der Farbenreihe nur eine einfache, aber vollständige Beobachtungsreihe erfordert, auch noch in anderer Weise ausdrücken.

Nämlich, wenn man um den Anfangspunkt der Strecken mit dem Radius a einen Kreis schlägt, und statt jeder Strecke den Punkt setzt, in welchem sie die Peripherie trifft, versehen mit einem Gewicht, welches der Länge jener Strecke proportional ist, so kann man die Mischfarbe aus zwei gegebenen Farben auf folgende Weise finden: Man stellt jede der zu mischenden Farben durch einen solchen schweren Punkt der Peripherie dar, so nämlich, dass der zugehörige Radius den Farbenton anzeigt, und das zugehörige Gewicht die Farbenintensität ausdrückt, und bestimmt den Schwerpunkt. Dann zeigt die Strecke, welche vom Mittelpunkte nach diesem Schwerpunkt gezogen ist, den Farbenton an, und, nachdem sie mit der Summe der Gewichte multiplicirt ist, auch die Farbenintensität.

Die Identität dieser Bestimmung mit der früheren ergiebt sich leicht aus folgender, in meiner Ausdehnungslehre erwiesenen Konstruktion des Schwerpunktes: Den Schwerpunkt der Punkte $A, B, C, \ldots$, welche beziehlich mit den Gewichten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ versehen sind, findet man, indem man von einem beliebigen Punkte O die Strecken OA, OB, $OC, \ldots$ zieht, diese beziehlich mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ multiplicirt, das heisst ihre Länge, ohne ihre Richtung zu ändern, im Verhältniss $1:\alpha$, $1:\beta$, $1:\gamma, \ldots$ ändert, aus den so † gewonnenen Strecken die 82 geometrische Summe bildet, und diese durch $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ dividirt, so ist der Endpunkt der so gewonnenen Strecke der gesuchte Schwerpunkt.

Was endlich die Beimischung des farblosen Lichtes betrifft, so ist dazu noch eine Voraussetzung erforderlich. Am einfachsten ist es, anzunehmen:

dass die gesammte Lichtintensität der Mischung die Summe sei aus den Intensitäten der gemischten Lichter.

Hierbei verstehe ich unter der gesammten Lichtintensität die Summe aus der Intensität der Farbe, wie ich sie oben festgestellt habe, und aus der Intensität des beigemischten Weiss, und die Intensität des Weissen, wie auch jeder einzelnen Farbe, setze ich dabei nicht dem Quadrat der Vibrationsintensität, sondern dieser selbst proportional, so dass also bei der Vermischung zweier weissen oder gleichfarbigen Lichter die Intensität der Mischung die Summe wird aus den Intensitäten der vermischten Lichter.

Es ist diese vierte Voraussetzung nicht als eine so wohl begründete zu betrachten, wie die früheren, obwohl sie sich aus theoretischen Betrachtungen durchaus als die wahrscheinlichste ergiebt.

Um die Folgerungen aus dieser Hypothese zu ziehen, wollen wir die Intensität der durch die Strecke a dargestellten Farbe gleich 1

setzen und annehmen, dass die verschiedenen homogenen Farben, deren Intensität 1 ist, durch Punkte der Peripherie dargestellt werden, so dass das Gewicht dieser Punkte dem Obigen gemäss gleichfalls gleich 1 gesetzt werden muss. Nun seien (Fig. 3) A und B zwei Punkte der Peripherie, welche also homogene Farben von der Intensität 1 darstellen. Es mögen nun die Farben αA und βB vermischt werden, das heisst zwei homogene Farben, deren Intensitäten α und β sind, und deren Farbentöne A und B sind, so ist die Summe der Intensitäten $\alpha + \beta$. Um nun die Farbe der Mischung zu bestimmen, haben wir nach dem Obigen den Schwerpunkt der mit den Gewichten α und β versehenen Punkte A und B zu suchen. Es sei derselbe C, der Mittelpunkt des Kreises sei O, so ist, wenn der Radius des Kreises 1 gesetzt ist, nach dem 83 Obigen die † Farbenintensität gleich $(\alpha + \beta) OC$. Es sei der Punkt, worin OC verlängert die Peripherie trifft, D, so ist die Gesammtintensität $\alpha + \beta$, oder, da der Radius 1 gesetzt ist, $(\alpha + \beta) OD$. Diese Gesammtintensität soll nach der gemachten Voraussetzung gleich der Intensität der Farbe *plus* der Intensität des beigemischten Weiss sein, also ist letztere gleich

Fig. 3.

$$(\alpha + \beta) OD - (\alpha + \beta) OC,$$

das heisst

$$= (\alpha + \beta) CD.$$

Also ist die Intensität des beigemischten Weiss gleich der mit der Summe der Gewichte multiplicirten Entfernung des Schwerpunktes von der Peripherie.

Hieraus folgt dann weiter, dass, wenn man stets die gesammte Masse im Schwerpunkt vereinigt denkt, in welchem Falle man den mit einem solchen Gewicht versehenen Schwerpunkt die *geometrische Summe* der einzelnen mit ihren Gewichten behafteten Punkte nennt*), dann jeder Lichteindruck nach seinen drei Momenten genau durch einen mit einem gewissen Gewichte behafteten Punkt dargestellt wird.

Die Richtung, in welcher dieser Punkt vom Centrum aus liegt, oder auch der Punkt, worin diese Richtung die Peripherie trifft, stellt den Farbenton dar, das Gewicht des Punktes die gesammte Lichtintensität; die mit diesem Gewichte multiplicirte Entfernung vom Centrum stellt die Intensität der Farbe dar, und die mit dem Gewichte multiplicirte Entfernung von der Peripherie die Intensität des beigemischten Weiss. Wenn wir unter Farbensättigung eines Lichtes die Intensität

*) Siehe meine Ausdehnungslehre und Möbius barycentrischen Calcul.

seiner Farbe, dividirt durch die ganze Lichtintensität, verstehen, so wird die Farbensättigung durch die einfache Entfernung des Punktes vom Centrum dargestellt. Hat man dann auf diese Weise zwei oder mehre zu mischende Farben dargestellt, so wird die Mischung vollständig durch die geometrische Summe der die einzelnen Farben darstellenden schweren Punkte dargestellt.

Man sieht, dass diess hier auf rein mathematischem Wege aus vier hinreichend begründeten Voraussetzungen abgeleitete Gesetz in seinen wesentlichen Zügen mit Newtons empirischer Regel, wie er sie am angeführten Orte aufstellt, übereinstimmt. Doch † bedarf die Art, wie 84 Newton die homogenen Farben auf dem Umfange seines Kreises vertheilt, einer durchgängigen Revision, zu welcher durch die Versuche des Herrn Helmholtz nur erst die ersten Anfänge gemacht sind. Erst wenn hierüber ein hinreichendes Licht verbreitet ist, kann man sich an die Beantwortung der interessanten Frage heranwagen, nach welchem Gesetze die den verschiedenen Farben zugehörigen Aetherschwingungen sich in den Nerven oder im Sensorium zu einfachen Farbeneindrücken zusammensetzen, eine Frage, von deren Beantwortung wesentlich die Idee der verschiedenen Farben und des farblosen Lichtes abhängt.

Stettin den 19. Februar 1853.

---

1 IV. Uebersicht der Akustik und der niedern Optik.

Von

Professor **Hermann Grassmann.**

Programm des Königlichen und Stadtgymnasiums zu Stettin, September 1854.

Akustik.

§ 1. Schall und Ton.

1. Schall. Die Akustik (ἀκουστική) ist die Lehre von dem, was hörbar ist. Jedes Hörbare heisst ein Schall. Unser Gehörorgan vernimmt dann und nur dann einen Schall, wenn die dasselbe umgebende Luft hinlänglich stark erschüttert wird. Um die Art kennen zu lernen, wie die Eigenthümlichkeit eines Schalles von den Erschütterungen der Luft abhängt, bedient man sich eines Apparates, durch den man der Luft beliebig schnell Erschütterungen mittheilen und den Zeitraum zwischen je zwei aufeinander folgenden Erschütterungen genau bestimmen kann, der sogenannten Sirene. Sie besteht aus einem Rade, dessen Umdrehungsgeschwindigkeit durch ein mit ihm verbundenes Räderwerk bestimmt werden kann, und welches am Umfange am gewöhnlichsten eine Reihe von Stäben oder Zähnen trägt; diese Stäbe bringen nun die Erschütterungen hervor, indem sie entweder an ein feststehendes Blech anschlagen, oder durch eine feststehende Spalte hindurchgehen, oder indem sie der Luft, welche durch eine Röhre geblasen wird, beim Vorübergehen den Durchgang abwechselnd verschliessen und wieder öffnen. Ist dann a die Zeit, die für eine Umdrehung des Rades gebraucht wird, und ist b der Bogen zwischen zwei Stäben dividirt durch die ganze Peripherie, so ist ab die Zeit, welche zwischen den durch die beiden Stäbe hervorgebrachten Erschütterungen verfliesst. Vermittelst dieses Apparates ergeben sich nun leicht die folgenden Gesetze.

2. Ton. Wenn die Erschütterungen regelmässig in gleichen Zeitintervallen wiederkehren, und mindestens 7 und höchstens 30 000 Er-

schütterungen auf eine Sekunde kommen, so entsteht, bei hinlänglicher Stärke der Erschütterungen, ein Ton von bestimmter Höhe oder Tiefe, und zwar wird der Ton um so höher, je schneller die Erschütterungen auf einander folgen. Jede Erschütterung der Luft bewirkt auf der Seite, nach welcher sich der erschütternde Körper hin bewegt, eine Luftverdichtung, auf der andern eine Luftverdünnung. Wenn die Lufterschütterungen regelmässig auf einander folgen, so nennen wir die Luftbewegung von einer Luftverdichtung bis zur nächstfolgenden eine **Luft-Schwingung**, und nennen die Zeit, welche zwischen einer Luftverdichtung und der nächstfolgenden verfliesst, die **Schwingungsdauer**.

Wenn die Schwingungen bei einem Tone doppelt so rasch auf einander folgen wie bei einem andern, so ist der erstere die Oktave des letzteren, und wird in der Musik mit demselben Buchstaben bezeichnet. Der tiefste in der Musik gebräuchliche Ton, das sogenannte 32-füssige C, welches mit $\underline{C}$ bezeichnet wird, macht etwa 16 (genauer $15\frac{1}{4}$) Schwingungen in der Sekunde. Schreitet man von ihm aus in **Oktaven** fort, so erhält man

Contra C, gross C, klein c, eingestrichen c, zweigestrichen c u. s. w., bezeichnet mit

	$\underline{C}$	C	c	$\bar{c}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$	...
mit etwa	32	64	128	256	512	1024	

Schwingungen in einer Sekunde. Es mögen zwei solche Töne, von denen der eine aus dem andern durch Fortschreitung um eine oder mehrere Oktaven hervorgeht, **gleichnamige** Töne heissen.

Anmerkung. Bekanntlich bedient man sich zur Benennung der Töne zwischen klein c und $\bar{c}$ der Buchstaben c d e f g a h $\bar{c}$. In der Reihe der Töne, welche mit den genannten Buchstaben bezeichnet werden, nennt man die Fortschreitung von e zu f, und ebenso die von h zu $\bar{c}$ einen **halben Ton**, die übrigen Fortschreitungen von einem Tone jener Reihe zum nächstfolgenden **ganze Töne**. Wenn man von einem Tone jener Reihe zu einem höheren Tone derselben Reihe fortschreitet, der von ihm aus gerechnet der 2-te, 3-te, 4-te, 5-te Ton der Reihe ist, so nennt man den letztern die Sekunde, Terz, Quarte, Quinte des ersteren und so fort, wodurch dann, weil $\bar{c}$ von c aus der 8-te Ton ist, der Name der Oktave gerechtfertigt ist. Ein Ton, der um einen halben Ton höher oder tiefer liegt als ein anderer, wird dadurch bezeichnet, dass man dem Namen des letzteren die Silbe *is* oder *es* anhängt (*es* statt *ees*, *as* statt *aes*, *b* gleichbedeutend mit *hes*); die genaueren Verhältnisse werden sich später ergeben.

3. **Harmonische Töne.** In derselben Zeit, in welcher der Ton $\underline{C}$ (Contra C) eine Schwingung macht, macht jeder der folgenden Töne die darunter verzeichnete Anzahl von Schwingungen:

$\underline{C}$	C	G	c	e	g	b^*	$\overline{c}$	$\overline{d}$	$\overline{e}$	$\overline{g}$	$\overline{b}^*$	$\overline{h}$	$\overline{\overline{c}}$	$\overline{\overline{\overline{d}}}$	$\overline{\overline{e}}$	$\overline{\overline{\overline{f}}}^*$	$\overline{\overline{g}}$	$\overline{\overline{gis}}$	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	24,	25	...,

3 wobei die mit * bezeichneten Töne, deren Schwingungszahlen durch 7 theilbar sind, nur in gewissen Tonverbindungen (den sogenannten Septimenakkorden) vorkommen, während die durch höhere Primzahlen theilbaren Schwingungszahlen solchen Tönen angehören, die in der Musik ganz verworfen oder höchstens als Nothbehelf gebraucht werden. Man nennt die ganze Reihe der Töne, deren Schwingungszahlen Mehrfache von der Schwingungszahl eines und desselben Tones sind, die zu diesem Tone gehörigen **harmonischen Töne**, und dieser Ton selbst heisst der Grundton der Reihe.

Anm. Man kann die Reihe harmonischer Töne sehr leicht an einer gespannten Saite beobachten, von der man nur einen Theil, und zwar zuerst die Hälfte, dann $1/_3$, $1/_4$ u. s. w. schwingen lässt (Monochord).

4. **Intervalle.** Wenn die Schwingungszahlen zweier Töne sich verhalten wie die zweier andern, so sagt man, die beiden ersten Töne lassen dasselbe **Intervall** zwischen sich, wie die beiden letzten. Man drückt am besten jedes Intervall durch einen unächten Bruch aus, dessen Zähler die Schwingungszahl des höheren Tones, und dessen Nenner die Schwingungszahl des tieferen Tones ist. Ein Intervall ist also gleich dem unächten Bruch $p:q$, wenn der höhere Ton des Intervalls p Schwingungen macht, während der tiefere q Schwingungen macht. Aus der Reihe der harmonischen Töne ergeben sich, wenn man die durch 7 theibaren Schwingungszahlen weglässt, für je zwei aufeinander folgende Töne der Reihe folgende Intervalle:

$\frac{2}{1}$ = Oktave, $\frac{3}{2}$ = Quinte, $\frac{4}{3}$ = Quarte, $\frac{5}{4}$ = grosse Terz, $\frac{6}{5}$ = kleine Terz, $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ ganze Töne, $\frac{16}{15}$ und $\frac{25}{24}$ halbe Töne.

5. Zwei Töne, welche gleichzeitig erklingen, bringen einen angenehmen Eindruck hervor (konsoniren), sobald das Verhältniss der Schwingungszahlen sich durch ganze Zahlen ausdrücken lässt, die entweder selbst kleiner als 7 sind, oder sich durch beliebig fortgesetzte Division mit 2 in ganze Zahlen, kleiner als 7, verwandeln lassen. Man nennt diese Intervalle **Konsonanzen**, alle übrigen **Dissonanzen**. Innerhalb einer Oktave giebt es 6 Konsonanzen:

Quinte	$= \frac{3}{2}$, $c:g$	Quarte	$= \frac{4}{3}$, $g:\overline{c}$
grosse Terz	$= \frac{5}{4}$, $c:e$	kleine Sexte	$= \frac{8}{5}$, $e:\overline{c}$
kleine Terz	$= \frac{6}{5}$, $e:g$	grosse Sexte	$= \frac{5}{3}$, $g:\overline{e}$

von denen die rechtsstehenden von den links danebenstehenden zu einer Oktave ergänzt werden. Die Konsonanzen sind um so vollkommener,

je kleiner die ganzen Zahlen sind, durch die sie sich ausdrücken lassen. Daher ist nach der Oktave die Quinte die vollkommenste Konsonanz. Die Musik wendet indessen auch Dissonanzen an, jedoch nur † diejenigen, deren Schwingungsverhältniss sich durch Produkte von Primzahlen, die die 7 nicht überschreiten, ausdrücken lassen, und sie verlangt überdies, dass jede Dissonanz sich in eine darauf folgende Konsonanz auflöse.

6. Verbindung der Intervalle. Wenn in einer Reihe von Tönen jeder folgende höher ist als der vorhergehende, und man die Intervalle zwischen je zwei auf einander folgenden Tönen dieser Reihe kennt, so findet man das Intervall je zweier getrennt liegender Töne dieser Reihe, wenn man die sämmtlichen dazwischen liegenden Intervalle mit einander multiplicirt. Ist zum Beispiel das Intervall zwischen dem ersten und zweiten Ton gleich a und das zwischen dem zweiten und dritten gleich b, so ist das zwischen dem ersten und dritten gleich ab; denn während der erste eine Schwingung macht, macht der zweite a Schwingungen, und während der zweite eine Schwingung macht, macht der dritte b Schwingungen, also während der zweite a Schwingungen macht, das heisst, während der erste eine Schwingung macht, macht der dritte ab Schwingungen, dass heisst, das Intervall zwischen dem ersten und dritten ist ab.

7. Akkorde. Mehr als zwei Töne, welche gleichzeitig erklingen, und von denen mindestens drei einander ungleichnamig sind, bilden einen Akkord, und wenn je zwei der Töne konsoniren, einen konsonirenden Akkord. Ein konsonirender Akkord, der aus drei ungleichnamigen Tönen besteht, heisst ein Dreiklang. Es giebt nur sechs Dreiklänge, welche sich innerhalb des Raumes einer Oktave halten, dass heisst, deren höchster Ton noch tiefer ist als die Oktave des tiefsten Tones. In der That, es sei das Intervall vom ersten (tiefsten) zum zweiten Tone des Dreiklanges $= a$, das vom zweiten zum dritten b, also das vom ersten zum dritten $= ab$, so müssen a, b und ab drei der in Nr. 5 genannten Konsonanzen sein; man überzeugt sich leicht, dass nur folgende Produkte jener Konsonanzen wieder eine jener Konsonanzen liefern:

$$\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{6}{5}=\tfrac{3}{2},\quad \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{4}=\tfrac{5}{3},\quad \tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{4}{3}=\tfrac{8}{5}.$$

Jede dieser Gleichungen liefert zwei Dreiklänge, indem das Intervall zwischen dem ersten und zweiten Ton entweder dem ersten oder dem zweiten Faktor des Produkts gleich sein kann. Die daraus folgenden Schwingungsverhältnisse für diese Dreiklänge sind:

$$1:\tfrac{5}{4}:\tfrac{3}{2}=4:5:6;\quad 1:\tfrac{4}{3}:\tfrac{5}{3}=3:4:5;\quad 1:\tfrac{6}{5}:\tfrac{8}{5}=5:6:8;$$

$$1:\tfrac{6}{5}:\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{6}:\tfrac{1}{5}:\tfrac{1}{4};\quad 1:\tfrac{5}{4}:\tfrac{5}{3}=\tfrac{1}{5}:\tfrac{1}{4}:\tfrac{1}{3};\quad 1:\tfrac{4}{3}:\tfrac{8}{5}=\tfrac{1}{8}:\tfrac{1}{6}:\tfrac{1}{5}.$$

Die Dreiklänge der ersten Reihe lassen sich aus dem ersten derselben ableiten, und zwar der zweite, indem man den höchsten Ton um eine Oktave vertieft, der dritte, indem man den tiefsten Ton um eine Oktave erhöht, und ebenso lassen sich die Dreiklänge der zweiten Reihe aus dem ersten Dreiklang derselben Reihe ableiten. Man nennt die Dreiklänge der ersten Reihe die harten Dreiklänge, die der zweiten 5 die † weichen Dreiklänge. Man nennt ferner den ersten Dreiklang in jeder der beiden Reihen die erste Lage, den zweiten die zweite Lage, den dritten die dritte Lage des harten oder weichen Dreiklanges. Es giebt also nur zwei wesentlich verschiedene Dreiklänge:

1. den harten Dreiklang, welcher in seiner ersten Lage aus einer grossen und einer darauf folgenden kleinen Terz besteht, mit den Tonverhältnissen:

$$4:5:6,$$

zum Beispiel

$$c \quad e \quad g;$$

2. den weichen Dreiklang, welcher in seiner ersten Lage aus einer kleinen und einer darauf folgenden grossen Terz besteht, mit den Tonverhältnissen:

$$\tfrac{1}{6} : \tfrac{1}{5} : \tfrac{1}{4},$$

oder in ganzen Zahlen:

$$10:12:15,$$

zum Beispiel

$$e \quad g \quad h.$$

Man nennt den Ton, welcher bei der ersten Lage der tiefste ist, den Grundton des Dreiklanges. Ferner nennt man den harten (oder weichen) Dreiklang selbst, so wie jeden Akkord, der aus ihm dadurch hervorgeht, dass man beliebige Töne desselben um beliebig viele Oktaven erhöht oder vertieft, oder beliebig viele dieser Oktaven hinzufügt, den Durakkord (oder Mollakkord), und zwar den *c*-Durakkord (oder *c*-Mollakkord) wenn *c* der Grundton ist; so zum Beispiel ist $c\ e\ g\ \bar{c}$ ein *c*-Durakkord, $e\ g\ h\ \bar{e}$ ein *e*-Mollakkord. Es giebt also nur zwei wesentlich verschiedene konsonirende Akkorde, den Durakkord und den Mollakkord.

Anm. Unter den dissonirenden Akkorden ist der Akkord mit den Tonverhältnissen

$$4:5:6:7,$$

zum Beispiel

$$c \quad e \quad g \quad b^{*}$$

derjenige, welcher sich durch die kleinsten Zahlen ausdrücken lässt, und welcher daher unter den dissonirenden Akkorden der wohlklingendste ist. Er heisst Septimenakkord. Als dissonirender Akkord muss er sich in einen darauf folgenden konsonirenden auflösen, dass heisst, seine sämmtlichen Dissonanzen müssen in

darauf folgende Konsonanzen übergehen. Es löst sich jener Akkord ($c\ e\ g\ b^*$) auf in den f-dur- oder f-moll-Akkord; indem c unverändert bleibt, e und g in f übergehen und b^* in die Dur- oder Moll-Terz von f übergeht.

8. Diatonische Tonleiter. (γένος διατονικόν, Durskala.) Wenn man zu einem Tone die beiden Töne hinzunimmt, welche um eine Quinte und Quarte höher liegen, und auf diesen drei Tönen die Durakkorde aufbaut, so erhält man die diatonische Tonleiter (Durskala), und zwar nennt man den Ton, von dem man ausging, den Grundton † der Tonleiter. Ist c der Grundton, so ist g die Quinte, f die Quarte desselben, die drei auf ihnen gebaute Akkorde sind 6

$$c\,e\,g = 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}, \quad g\,h\,d = \tfrac{3}{2}, \tfrac{15}{8}, \tfrac{9}{8}, \quad f\,a\,c = \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 2.$$

Diese Töne nach ihrer Höhe geordnet geben die Tonleiter

$$c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \quad h \quad \bar{c}$$

mit den Schwingungszahlen:

$$1 \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{5}{4} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{5}{3} \quad \tfrac{15}{8} \quad 2,$$

oder in ganzen Zahlen:

$$24 \quad 27 \quad 30 \quad 32 \quad 36 \quad 40 \quad 45 \quad 48;$$

die aufeinander folgenden Intervalle sind,

$$\tfrac{9}{8} \quad \tfrac{10}{9} \quad \tfrac{16}{15} \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{10}{9} \quad \tfrac{9}{8} \quad \tfrac{16}{15},$$

so dass, wie wie wir oben fanden, zwischen c und f, und ebenso zwischen h und c, das Intervall eines halben Tones $\frac{16}{15}$ liegt, die übrigen Intervalle sind die ganzen Töne $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$.

9. Chromatische Tonleiter. (γένος χρωματικόν.) Da $\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9}$ ist, so bilden die beiden halben Töne $\frac{16}{15}$ und $\frac{25}{24}$ zusammengesetzt einen kleinen ganzen Ton. Ebenso lässt sich der grosse ganze Ton $\frac{9}{8}$ zerlegen in $\frac{15}{14} \cdot \frac{21}{20}$, also in zwei halbe Töne, von denen der eine in der zu c gehörigen harmonischen Tonreihe zwischen h und b^*, und der andere zwischen e und f^* liegt. Zerlegt man auf diese Weise jeden ganzen Ton der diatonischen Tonleiter in zwei halbe, so erhält man eine Tonleiter von zwölf halben Tönen, die jedoch von sehr verschiedener Grösse sind. Man nennt eine Tonleiter von zwölf halben Tönen, welche zusammen eine Oktave umfassen, eine chromatische Tonleiter. Wenn in ihr alle halben Töne von gleicher Grösse sind, so sagt man, sie sei nach gleichschwebender Temperatur gestimmt. Es sei s der halbe Ton bei gleichschwebender Temperatur, so wird die chromatische Tonleiter für den Grundton 1 die folgende sein

$$1, s, s^2, \ldots\ldots\ldots\ldots s^{12}.$$

Also da die Tonleiter eine Oktave umfassen soll, so muss s^{12} die

Oktave des Grundtons, also gleich 2 sein; somit

$$s = 2^{\frac{1}{12}}.$$

Die Exponenten von s in der obigen Reihe sind:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

und die dazugehörigen Töne sind, wenn der erste Ton *c* ist, folgende:

c	*cis* *des*	*d*	*dis* *es*	*e*	*f*	*fis* *ges*	*g*	*gis* *as*	*a*	*ais* *b*	*h*	$\bar{c}$

Um hiermit die diatonische Tonleiter zu vergleichen, sei n die Schwingungszahl für irgend einen Ton derselben, wenn der Grundton 1 ist, und sei n gleichfalls als Potenz von s darzustellen, also $n = s^x$, so hat man, da $s = 2^{\frac{1}{12}}$ ist, $n = 2^{\frac{x}{12}}$, das heisst

$$\log. n = \frac{x}{12} \log. 2, \quad x = \frac{12}{\log. 2} \log. n,$$

woraus sich x ungefähr gleich $40 . \log. n$ (genauer $= 39{,}8631 . \log. n$) ergiebt. Setzt † man hier statt n nach und nach die Werthe 1, $\frac{9}{8}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{15}{8}$, 2 ein, so erhält man die Werthe von x, mit welchen s potenzirt werden muss, um die Töne der diatonischen Tonleiter zu geben, das heisst, man findet um wieviel halbe Töne (gleichschwebender Temperatur) jeder Ton der diatonischen Skala vom Grundton entfernt liegt. Man findet dafür, bis auf Hundertstel eines halben Tones berechnet, die Werthe:

0 2,04 3,86 4,98 7,02 8,84 10,88 12,

während die gleichschwebende Temperatur für die Töne

	c	*d*	*e*	*f*	*g*	*a*	*h*	$\bar{c}$
die Werthe:	0	2	4	5	7	9	11	12

liefert. Als Mass ist hierbei der halbe Ton s der gleichschwebenden Temperatur zu Grunde gelegt.

Also die Quinte sollte nach der gleichschwebenden Temperatur 7 halbe Töne enthalten, die reine Quinte enthält aber, wie die erste Werthreihe zeigt, 7,02 halbe Töne, die Quinte der gleichschwebenden Temperatur ist also um $\frac{2}{100}$ eines halben Tones zu tief; dagegen ist die grosse Terz der gleichschwebenden Temperatur um $\frac{14}{100}$, also etwa um $\frac{1}{7}$ eines halben Tones zu hoch, Unterschiede, welche zwar einem geübten Ohr erkennbar, aber doch nicht gross genug sind, um den Eindruck der Konsonanz wesentlich zu stören.

§ 2. Fortpflanzung des Schalles.

1. Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit, mit der sich der Schall fortpflanzt, ist für hohe und tiefe Töne dieselbe, und beträgt für die atmosphärische Luft bei 0° 1024 Pariser Fuss oder 1060 rheinländische Fuss; bei einer Erhöhung der Temperatur um 1° C nimmt die Geschwindigkeit, mit der sich der Schall durch die atmosphärische Luft fortpflanzt, um 1,8 Fuss zu. Durch die meisten übrigen Körper pflanzt sich der Schall mit grösserer Geschwindigkeit fort, zum Beispiel durch Wasser $4\frac{1}{3}$-mal, durch Marmor $7\frac{1}{2}$-mal, durch Eisen, durch Fichten- oder Tannenholz 15-mal so rasch als durch atmosphärische Luft. Durch den luftleeren Raum dringt er gar nicht hindurch.

Die allgemeine Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie man sie durch die Theorie und durch die Beobachtung gefunden hat, ist

$$c = \sqrt{2mg},$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, g der Fallraum, und m das Mass der Elasticität für die Substanz ist, durch welche der Schall sich fortpflanzt. Wenn man nämlich auf einen aus jener Substanz bestehenden senkrechten Cylinder von 1 Fuss Höhe ein Gewicht legt, was gleich ist dem Gewicht des Cylinders, so wird dadurch die Höhe des Cylinders etwas verkürzt; die Zahl, welche angiebt, wie oft diese † Verkürzung in der ursprünglichen Höhe, also in 1 Fuss, enthalten ist, heisst das Mass der Elasticität für die Substanz*). (Beobachtungen; Berechnung von Neuton und Laplace.)

2. Fortpflanzung in Röhren oder Stäben. Da der Schall in Verdichtungen und Verdünnungen derjenigen Substanz besteht, durch welche er sich verbreitet, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles gleich der Geschwindigkeit, mit welcher sich eine in der Substanz hervorgebrachte Verdichtung oder Verdünnung durch dieselbe fortpflanzt. Hat man eine horizontale Reihe von gleich grossen Marmorkugeln, deren Mittelpunkte in gerader Linie liegen, und welche so an Fäden hängen, dass sie sich gegenseitig berühren, und man lässt die erste Kugel gegen die zweite stossen, so würde, wenn keine Kugel weiter vorhanden wäre, die zweite Kugel (unter Voraussetzung voll-

*) Diese Formel stimmt auch für Luftarten genau mit der Beobachtung überein, wenn man dafür sorgt, dass bei der Bestimmung des Masses der Elasticität die durch die Zusammendrückung erzeugte Wärme nicht entweicht.

kommener Elasticität) mit derselben Geschwindigkeit fortfliegen, mit welcher die erste anlangte, während diese stehen bleibt; folgen also noch mehrere Kugeln, so wird nur die letzte abfliegen; zwischen der Zeit, wo die erste anprallt, und wo die letzte abfliegt, wird der Zeitraum liegen, während dessen sich die durch das Anprallen bewirkte Verdichtung bis zur letzten Kugel fortpflanzt. Also, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch Marmor etwa 8000′ in einer Sekunde beträgt, so würde jene Kugelreihe 8000′ lang sein müssen, wenn die letzte Kugel eine Sekunde nach dem Anprallen der ersten abfliegen sollte; und wenn die letzte Kugel noch eine feststehende elastische Wand berührte, die senkrecht gegen die Kugelreihe stände, so würde sich die Verdichtung wieder rückwärts fortpflanzen, und die erste Kugel würde zwei Sekunden, nachdem sie anprallte, wieder zurückprallen. Stellt man sich statt der Kugeln Würfel vor, so hat man ein genaues Bild von der Fortpflanzung der Verdichtung durch Stäbe und Röhren. Die Verdünnung pflanzt sich genau auf gleiche Weise fort, und also auch der Schall. Man sieht, dass sich derselbe, unter Voraussetzung vollkommener Elasticität, in Röhren oder durch Stäbe ungeschwächt fortpflanzen muss.

3. Fortpflanzung nach allen Seiten. Stellt man sich in der atmosphärischen Luft eine Kugel vor, die sich plötzlich nach allen Seiten hin ausdehnt, so wird die umgebende Luft verdichtet, und diese Verdichtung schreitet mit der Schallgeschwindigkeit fort; nach einer Sekunde bildet also die verdichtete Luft eine Kugelschicht, deren Radius 1024 Fuss ist. Man nennt diese fortschreitende Kugelschicht eine Verdichtungswelle. Wenn sich die Kugel nun zusammenzieht, so sendet sie jener Verdichtungswelle eine Verdünnungswelle nach. Wenn eine Reihe abwechselnder Verdichtungs- und Verdünnungswellen † unmittelbar auf einander folgen, so nennt man die Entfernung der Mitte einer Verdichtungswelle von der Mitte der nächstfolgenden Verdichtungswelle die Wellenlänge. Dabei nimmt der Schall an Stärke in dem Masse ab, als er sich über einen grösseren Raum ausbreitet, das heisst, er nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt. Geht der Schall an einem festen Körper vorüber, so verbreitet er sich zwar auch hinter demselben, nimmt aber, indem er aus der Richtung des Wellenradius abbiegt, bedeutend an Stärke ab.

4. Gleichzeitigkeit der Wellen. Wenn in der Luft oder in irgend einem elastischen Körper beliebig viele Systeme von Schallwellen zugleich erregt werden, so pflanzen sich diese, ähnlich den Wasserwellen, gleichzeitig fort, ohne sich gegenseitig zu stören, nur dass, wo sich zwei oder mehrere Wellen kreuzen, die Verdichtung die

algebraische Summe wird aus den durch die einzelnen Wellen bewirkten Verdichtungen, wobei die Verdünnung als negative Verdichtung gerechnet wird. Doch werden durch das Ineinandergreifen verschiedener Wellensysteme manche eigenthümliche Erscheinungen hervorgebracht, wie die Kombinationstöne und die Interferenzerscheinungen.

5. Echo und Resonanz. Wenn der Schall gegen die Oberfläche eines festen elastischen Körpers prallt, so wird dieser dadurch gleichfalls in Schwingungen versetzt; zugleich aber wird der Schall zurückgeworfen, und zwar so, dass die Fortpflanzungsrichtung des zurückgeworfenen Schalles mit dem auf der Oberfläche errichteten Lothe einen gleichen aber nach entgegengesetzter Seite liegenden Winkel bildet, wie die Fortpflanzungsrichtung des auffallendes Schalles (Einfallsloth, Einfallswinkel, Zurückwerfungswinkel). Der zurückgeworfene Schall heisst Echo (Widerhall, Nachhall). Da es keinen vollkommen elastischen Körper giebt, so theilt sich der Schall, indem er an die Oberfläche eines festen Körpers, oder überhaupt eines Körpers stösst, der den Schall mit anderer Geschwindigkeit fortpflanzt, in drei Theile: der eine Theil dringt in den festen Körper ein, ein anderer wird zurückgeworfen, ein dritter verschwindet als Schall (wird absorbirt). Wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den beiden aneinander gränzenden Körpern gleich gross ist, so findet gar keine Zurückwerfung statt.

Hieraus erklärt sich die Wirkung des Resonanzbodens, das Mitklingen gleichgestimmter Saiten, das Hindurchdringen des Schalles in rings geschlossene Räume, die akustische Wirkung der Brennpunkte eines elliptischen Saales, des Hörrohrs.

6. Das Ohr. Die Schallwellen, welche aus der Luft zu dem Ohre gelangen, werden zuerst durch die Ohrmuschel und den Gehörsgang concentrirt, und erschüttern das Trommelfell, durch welches der Gehörsgang geschlossen ist; die Schwingungen des Trommelfelles theilen sich dann theils der Luft in der Trommelhöhle, theils einer Reihe von vier Knöchelchen mit, von denen das erste (der Hammer) mit dem Trommelfell verwachsen † ist. Von der Trommelhöhle führen zwei mit elastischen Häuten überzogene Oeffnungen, das sogenannte runde und ovale Fenster, in das mit einer wässrigen Flüssigkeit erfüllte, mannigfach verzweigte Labyrinth, in welchem sich die Gehörsnerven ausbreiten. Bei angespanntem Hören wird nur das letzte der vier Knöchelchen (der Steigbügel) an das ovale Fenster gedrückt; dann pflanzen sich die Schwingungen des Trommelfelles theils durch die Luft der Trommelhöhle nach dem runden Fenster hin fort, und gelangen von da zu den Gehörsnerven des Labyrinths, theils pflanzen sie

10

sich durch die Reihe der vier Knöchelchen, ohne erst durch dazwischentretende Luft geschwächt zu sein, zum ovalen Fenster und von da zu den Gehörsnerven fort. Um einen starken Schall ohne Nachtheil zu empfinden, wird dagegen das Trommelfell nach aussen gezogen und dadurch das letzte der vier Knöchelchen (der Steigbügel) vom ovalen Fenster getrennt. Dann dringt der Schall nur durch die Luft der Trommelhöhle zum Labyrinth, und wird dadurch bedeutend geschwächt. Ausserdem kann der Schall auch durch die festen Theile des Kopfes unmittelbar dem Labyrinth und den darin befindlichen Nerven mitgetheilt werden.

§ 3. **Erregung der Töne durch Schwingungen.**

1. Arten der Schwingungen. Die Töne werden am vollkommensten hervorgebracht durch Schwingungen länglicher elastischer Körper. Man unterscheidet bei ihnen zwei Hauptarten von Schwingungen: Transversalschwingungen, bei welchen sich der Körper seitwärts hin und her biegt, und Longitudinalschwingungen, bei welchen sich der Körper nur abwechselnd verlängert und verkürzt.

2. Gespannte Saiten. Wenn eine gespannte Saite transversal schwingt, und zwar so, dass innerhalb derselben kein Punkt in Ruhe bleibt, so findet (wie Rechnung und Beobachtung ergiebt) zwischen der Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde (n), der Länge der Saite (l), der Spannung derselben (p) und dem Fallraum (g) folgende Gleichung statt:

$$2nl = \sqrt{2pg}.$$

Hier ist der Fallraum g gleich $15^5/_8$ Fuss, und unter der Spannung p ist das spannende Gewicht dividirt durch das Gewicht von einem Fuss der Saite verstanden.

Soll zum Beispiel eine Saite von 1 Fuss Länge 512 Schwingungen in einer Sekunde machen, so wird $2nl = 2 \,.\, 512 = 2^{10}$. Nimmt man dann der einfachen Rechnung wegen $g = 16 = 2^4$ an, so ergiebt sich $p = 2^{15}$; das heisst, das spannende Gewicht muss 2^{15}-mal so gross sein als das der Saite.

Lässt man von einer Saite, ohne ihre Spannung zu verändern, nur die Hälfte oder $^1/_3$ oder $^1/_4$ u. s. w. schwingen, so bleibt $\sqrt{2pg}$ unverändert, also wird die Anzahl der Schwingungen 2-mal, 3-mal, 4-mal so † gross, als wenn die ganze Saite schwingt, und so fort, und man erhält also dann nach und nach die ganze Reihe der harmonischen Töne, zu welcher der Ton der ganzen Saite der Grundton ist (Monochord).

3. Schwingungsknoten. Eine Saite kann auch so schwingen, dass sie sich in eine Anzahl gleicher Theile theilt, deren jeder für sich schwingt, wobei jedoch die Saite immer stetig gekrümmt bleibt, ohne irgend wo einen Winkel zu bilden. Man nennt die Punkte, in welchen die schwingenden Theile aneinander stossen, und welche selbst in Ruhe bleiben, Schwingungsknoten. Ja, es ist möglich, die Saite so zu bewegen, dass sie als Ganzes schwingt, und sich doch zugleich in eine Anzahl gleicher Theile theilt, welche ausserdem für sich schwingen; so dass neben dem Hauptone, den die Saite giebt, wenn sie als Ganzes schwingt, noch einer, ja selbst mehrere Töne mitklingen können, welche zu dem Hauptone harmonisch sind. (Aeolsharfe, Flageolettöne.)

4. Transversal schwingende Stäbe können gleichfalls mit oder ohne Schwingungsknoten schwingen; wenn sie ohne Schwingungsknoten schwingen, so verhält sich die Anzahl der Schwingungen umgekehrt wie das Quadrat der Länge. (Physharmonika.)

5. Eine transversal schwingende Scheibe schwingt stets in Abtheilungen, welche durch ruhende Linien, die Knotenlinien heissen, getrennt sind, und zwar so, dass die Scheibe immer stetig gekrümmt ist. Die Knotenlinien werden durch hinaufgestreuten Sand leicht sichtbar gemacht, und bilden dann die sogenannten Klangfiguren.

6. Für die Longitudinalschwingungen einer an beiden Seiten freien Säule von beliebiger Substanz gilt die Formel

$$2nl = c,$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch die Substanz des Körpers bedeutet; oder wenn wir für c seinen Werth aus § 2, 1 setzen

$$2nl = \sqrt{2mg},$$

also dieselbe Formel wie für Saiten, nur dass statt der Spannung p das Mass der Elasticität m eintritt. Bei einer Säule, die an einem Ende gegen eine feste Wand stösst, ist die Anzahl der Longitudinalschwingungen dieselbe, wie bei einem doppelt so langen Stabe, der an beiden Enden frei ist.

Es lassen sich alle diese Beziehungen leicht aus der Betrachtung der Schwingungsweise unmittelbar ableiten. In der That, wird dem einen Ende eines an beiden Enden freien Stabes auf irgend eine Weise eine momentane Verdichtung mitgetheilt, die man sich zunächst nur auf eine unendlich dünne Schicht ausgedehnt denken kann, so pflanzt sich diese mit der Geschwindigkeit c nach dem andern Ende fort; dort kann die verdichtete Schicht sich ausdehnen; sie dehnt sich aber nicht bloss so weit aus, bis sie ihre natürliche Dichtigkeit wieder erreicht

hat, sondern nach dem Trägheitsgesetz dehnt sie sich noch weiter aus;
12 sie wird also eine verdünnte † Schicht werden; diese Verdünnung schreitet dann wieder mit der Geschwindigkeit c nach dem ersten Ende zurück, wo die Schicht sich dann zusammenzieht und eine verdichtete Schicht wird; und so fort.

Betrachtet man eins der beiden Enden, so hat sich zwischen zwei auf einander folgenden Verdichtungen, das heisst während einer Schwingung, die Welle auf der Länge des Stabes einmal hin und her bewegt, hat also den Weg $2l$ gemacht, also macht sie bei n Schwingungen, das heisst in einer Sekunde, den Weg $2nl$; da aber die Geschwindigkeit c ist, das heisst, da die Welle in einer Sekunde den Weg c macht, so muss $2nl = c$ sein. Hierbei wird der Stab sich abwechselnd verlängern und verkürzen, nämlich sich verlängern, wenn die Schicht am Ende des Stabes sich ausdehnt, sich verkürzen, wenn diese Schicht sich verdichtet. Durch diese Verlängerungen und Verkürzungen wird aber die das Stabende begränzende Luft abwechselnd verdichtet und verdünnet, und also ein Schall in ihr erregt. Stösst der Stab an einem Ende gegen eine feste Wand, so wird die Verdichtungswelle dort zurückgeworfen, und es muss also während einer Schwingung die Verdichtung viermal den Stab durchlaufen; die Schwingungszahl für einen solchen Stab wird also dieselbe, wie die für einen doppelt so langen, beiderseits freien Stab.

Sind n und l bekannt, so kann man daraus c finden, und hat also dadurch ein sehr einfaches Mittel, um die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen.

7. Theilung der Longitudinalschwingungen. Auch der longitudinal schwingende Stab kann sich in mehrere Theile theilen, deren jeder für sich schwingt, und zwar muss sich dabei der an beiden Enden freie Stab in lauter gleiche Theile theilen, von denen ein jeder sich verkürzt, während die angränzenden Theile sich verlängern; da, wo die einzelnen Theile aneinander gränzen, liegen also keine Schwingungsknoten, sondern hier finden gerade die stärksten Bewegungen statt, während diese in der Mitte der einzelnen Theile am schwächsten sind. Die Töne, welche durch Theilung hervorgehen, müssen, wie bei den Saiten, die Reihe der harmonischen Töne bilden. Wenn ein longitudinal schwingender Stab, der an dem einen Ende gegen eine feste Wand stösst, sich theilt, so kann er sich nur so theilen, dass alle übrigen Theile einander gleich sind, der an die feste Wand stossende Theil aber halb so gross ist; wenn man die Anzahl dieser Theile von 1 ausgehend nach und nach vermehrt, so müssen die hervorgebrachten Töne sich wie $1:3:5$ u. s. w., also wie die ungeraden

Zahlen verhalten, und man erhält eine Reihe von harmonischen Tönen, in welchen die sämmtlichen Oktaven fehlen.

8. **Blaseinstrumente** nennt man diejenigen, in welchen die Schwingungen einer Luftsäule entweder für sich, oder verbunden mit denen eines festen Körpers, den Ton liefern (reine, gemischte). Die Schwingungen der Luftsäule sind stets Longitudinalschwingungen, und es gelten für sie die oben entwickelten Gesetze dieser Schwingungen. Doch gelten diese Gesetze hier nur annähernd, da der Widerstand der äusseren Luft, der bei festen Körpern zu vernachlässigen ist, hier einigen Einfluss übt. 13

Die reinen Blaseinstrumente sind Röhren, die entweder nur an einem Ende, oder an beiden Enden offen sind, und in welchen die Schwingungen der Luftsäule in der Röhre durch einen schmalen Luftstrom erregt werden, welcher so gegen die Oeffnung geblasen wird, dass ein Theil desselben in die Röhre gelangen und die Luft verdichten, ein anderer dagegen die aus der Röhre strömende Luft mit sich fortführen kann. In den an beiden Seiten offenen Röhren, wie bei den offenen Labialpfeifen der Orgel und {bei} der Flöte, ist die schwingende Luftsäule als ein an beiden Enden freier Stab zu betrachten, und es gilt daher für sie die Formel $2nl = c$. Ist die Röhre mit atmosphärischer Luft von 0^0 gefüllt, so ist $c = 1024$ Pariser Fuss, also ist dann $2nl = 2^{10}$. Ist zum Beispiel die Pfeife 32 Fuss lang, also $2l = 2^6$, so wird $n = 2^4 = 16$; das heisst, eine 32-füssige offene Pfeife giebt den Ton, der 16 Schwingungen in einer Sekunde macht, das heisst den Ton $\underline{\underline{C}}$, oder das 32-füssige C (§ 1, 2).

In den nur an einer Seite offenen Röhren, den **gedeckten** Labialpfeifen der Orgel, ist die schwingende Luftsäule als ein gegen eine feste Wand stossender Stab zu betrachten, und der Ton ist also derselbe wie bei einer doppelt so langen offenen Pfeife.

9. Bei den **gemischten Blaseinstrumenten** wirkt ausser der schwingenden Luftsäule noch ein schwingender fester Körper auf die Erzeugung des Tones ein. Bei einigen derselben dienen die Schwingungen des festen Körpers nur dazu, um nach der Willkür des Blasenden eine Theilung der Luftsäule zu bewirken. Hierhin gehört zuerst das Horn, die Trompete und die Posaune, bei welchen die Lippen des Blasenden durch ihre Schwingungen die Theilung der Luftsäule nach Willkür bewirken, und daher die Reihe der harmonischen Töne in grösster Vollständigkeit hervorgebracht werden kann. Ferner gehören dahin die Klarinette, die Hoboe und das Fagott, bei welchen ein oder zwei Rohrblättchen, welche in das Mundstück eingesetzt sind, und welche für sich keine Töne hervorzubringen vermögen,

unter dem Einfluss der Lippen des Bläsers die Theilung der Luftsäule bewirken.

Wesentlich verschieden von diesen Instrumenten sind diejenigen, bei welchen der schwingende Körper (die Zunge) schon für sich einen Ton zu geben vermag, der dann durch die im Einklang oder in Harmonie mit ihm schwingende Luftsäule verstärkt oder modificirt wird. Hierhin gehören die Zungenpfeifen der Orgel, so wie auch das Stimmorgan des Menschen.

10. Die menschliche Stimme wird durch eine der Zungenpfeife ähnliche Vorrichtung hervorgebracht. Nämlich über den oberen Theil der Luftröhre, den Kehlkopf, sind zwei elastische Häute, die 14 Stimmbänder, gezogen, welche willkürlich gespannt † werden können, und im Zustande der Spannung nur eine schmale Ritze, die Stimmritze, zwischen sich lassen, sodass die Luft aus der Luftröhre dann nur durch die verengte Stimmritze hindurchdringen kann. So lange die Stimmbänder nicht gespannt sind, geht die Luft ohne Tonbildung zur Luftröhre ein und aus; sobald sie aber gespannt sind, entstehen durch die ausströmende Luft Schwingungen der Stimmbänder, die um so schneller auf einander folgen, und also um so höhere Töne erzeugen, je stärker die Stimmbänder gespannt sind. Bei den Falsetttönen schwingen nur die an die Stimmritze gränzenden Ränder der Stimmbänder.

Die Stimmbänder setzen zugleich die in der Mundhöhle befindliche Luft in Schwingungen, es entstehen dadurch leise Nebentöne, welche je nach der Form, die man der Mundhöhle giebt, verschieden ausfallen, und welche der Reihe der harmonischen Töne angehören, die den Ton der Stimmbänder zum Grundton hat. Auf diese Weise entstehen die Vokale. Ein aufmerksames Ohr hört leicht beim Uebergange von *u* durch *ü* zum *i* eine Reihe leiser harmonischer Nebentöne, welche vom zweigestrichenen *c* bis zum fünfgestrichenen *c* fortschreiten können, und welche man bei denselben Mundstellungen auch für sich hervorbringen kann. Beim Vokale *a* klingt eine ganze Reihe der harmonischen Nebentöne mit, welche das Ohr in der Regel noch bis zur vierten Oktave vom Grundton aus wahrnehmen kann, so dass also bei dem *a* ein voller Akkord von Nebentönen mitklingt. Hierdurch ist zugleich der Uebergang von *a* durch *o* zu *u*, sowie der von *a* durch *e* zu *i*, oder durch *ö* zu *ü* erklärt.

Unter den Konsonanten sind die semivocales noch von einem Stimmtone begleitet; bei den mutis fehlt der Stimmton, und die Nebentöne treten nicht mehr rein, sondern mit einer Menge unharmonischer, schwer von einander unterscheidbarer Töne vermischt hervor, und zwar

die Nebentöne des *a* bei den Kehllauten, die des *e* und *i* bei der Reihe der Gaumenlaute, die des *u* und *ü* bei den Lippenlauten, während bei den Zungenlauten die höchsten (zischenden) Nebentöne, die keinem Vokale mehr angehören, hervortreten.

Optik.

15

§ 1. Optisches Grundgesetz.

1. Das Licht verbreitet sich, so lange es in demselben durchsichtigen Mittel bleibt, geradlinigt und zwar im luftleeren Raume am schnellsten, nämlich mit einer Geschwindigkeit von etwa 42000 Meilen in einer Sekunde. Dabei wird es um so schwächer, je grösser die Fläche ist, über die es sich ausbreitet.

2. Die Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume hat man zuerst durch die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten bestimmt. Der nächste dieser vier Trabanten wird bei jedem Umlauf um den Jupiter einmal verfinstert, nämlich, wenn er in den Schatten des Jupiters tritt; der Zeitraum von einer Verfinsterung zur nächst folgenden beträgt 42 St. 28 M. 35 S. Beobachtet man nun eine Verfinsterung, wenn die Erde dem Jupiter am nächsten steht, und wieder wenn sie am entferntesten steht, das heisst nach etwa einem halben Jahre, so erfolgt die letztere Verfinsterung gegen die erste gerechnet ungefähr 1000 Sekunden zu spät. Also muss das Licht 1000 Sekunden gebrauchen um den Durchmesser der Erdbahn, das heisst einen Weg von 42 Millionen Meilen zu durchlaufen, also eine Sekunde für den Weg von 42000 Meilen.

Ein Mittel, um die Geschwindigkeit des Lichtes in der atmosphärischen Luft, oder auch in anderen Substanzen zu bestimmen, liefert die Aberration des Lichtes. Es sei S der wirkliche Ort des Sternes, A die Mitte des Objektivglases eines Fernrohres, B die Mitte des Okulars, und sei das Fernrohr nach dem wirklichen Ort des Sternes, nach S, hingerichtet, so dass SAB eine gerade Linie bildet. Der von S auf A fallende Lichtstrahl würde, wenn das Fernrohr feststände, nach B gelangen; angenommen nun, das Fernrohr bewegte sich parallel in einer Richtung fort, die senkrecht gegen die Axe AB des Fernrohrs wäre, und zwar so rasch, dass, während das Licht den Weg von A nach B zurücklegt, das Fernrohr von AB nach $\alpha\beta$ gerückt ist, so wird der Punkt B jetzt nicht mehr in der Mitte des Okulars liegen, sondern um $B\beta$ davon entfernt; $B\beta$ zu BA verhält sich dann wie die

Geschwindigkeit der Lichtbewegung zu der Geschwindigkeit der Fernrohrbewegung. Das Fernrohr befindet sich nun auf der Erde, die sich
16 mit einer Geschwindigkeit von 4,1 Meilen in † der Sekunde bewegt. Befindet sich also der Stern in einer gegen diese Bewegungsrichtung senkrechten Richtung, so ist $B\beta$ senkrecht zu AB, und es verhält sich $B\beta$ zu BA wie 4,1 Meilen zu der Geschwindigkeit, mit welcher das Licht die im Fernrohr enthaltene Luft durchläuft. Nun ist das Verhältniss von $B\beta$ zu BA durch den Winkel $BA\beta$ bekannt, das heisst durch den Winkel, den die Richtung, in welcher der Stern wirklich liegt, mit der Richtung bildet, in welcher er durch das Fernrohr gesehen erscheint, woraus sich dann die Lichtgeschwindigkeit berechnen lässt.

3. Schatten. Durch die geradlinigte Fortpflanzung des Lichtes wird der Schatten eines undurchsichtigen Körpers bedingt. Kernschatten nennt man den Raum, in welchen von keinem Punkte des leuchtenden Körpers, Halbschatten den Raum, in welchen nur von einem Theile des leuchtenden Körpers Licht gelangen kann.

4. Camera obscura. Wenn in ein dunkles Zimmer nur durch eine kleine kreisförmige Oeffnung Licht gelangen kann, so bildet sich jeder Lichtpunkt auf der gegenüberstehenden Wand als ein schwach erleuchteter Kreis ab, und jeder lichtausstrahlende Gegenstand bildet sich auf der Wand verkehrt ab, und zwar mit schattirten Umrissen, welche von dem Halbschatten herrühren, den die Ränder der Oeffnung werfen. Dieselbe Erscheinung tritt auch bei anders gestalteten Oeffnungen ein, wobei nur die Umrisse anders schattirt erscheinen.

5. Erleuchtung. Da das Licht um so schwächer wird, je grösser die Fläche ist, über die es sich ausbreitet, so muss das Licht in der doppelten oder dreifachen Entfernung vier- oder neunmal schwächer sein, und wenn es auf eine Fläche einmal senkrecht auffällt und hernach unter gleichen Umständen schief auffällt, so dass die einfallenden Strahlen mit dem senkrecht einfallenden (dem Einfallslothe) einen Winkel (den Einfallswinkel) bilden, so muss sich die Erleuchtung im ersten Falle zur Erleuchtung im zweiten verhalten wie die auffallende Lichtmenge zu ihrem senkrechten Durchschnitt, das heisst: Die Erleuchtung verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle und direkt wie der Cosinus des Einfallswinkels.

§ 2. Katoptrisches Grundgesetz.

1. Ein Lichtstrahl, welcher auf eine spiegelnde Fläche fällt, wird so zurückgeworfen, dass der einfallende und der

zurückgeworfene (reflektirte) Strahl mit dem Einfallslothe gleiche aber entgegengesetzt liegende Winkel bilden, oder: der Reflexionswinkel ist dem Einfallswinkel gleich aber entgegengesetzt liegend. (Akustik § 2, 5.)

2. Ebene Spiegel. Das Bild eines leuchtenden Punktes in einem ebenen Spiegel findet man, wenn man das von jenem Punkte auf den Spiegel gefällte Loth † um sich selbst verlängert. Dann ist der Endpunkt dieser Verlängerung der Ort des Bildes. 17

Denn wenn von dem leuchtenden Punkte irgend ein Strahl auf den Spiegel fällt, so muss die rückgängige Verlängerung des reflektirten Strahles durch den genannten Punkt gehen, weil die beiden so entstehenden Dreiecke kongruent werden.

3. Erleuchtung. Wenn das Licht von einem leuchtenden Körper auf eine Fläche fällt, welche unregelmässig verlaufende Erhöhungen und Vertiefungen darbietet, so erscheint kein Bild des Körpers, sondern das Licht wird von der Fläche nach allen Seiten hin zurückgeworfen. Man nennt dann diese Fläche erleuchtet.

§ 3. Dioptrisches Grundgesetz.

1. Ein Lichtstrahl, welcher in ein anderes Mittel eintritt, wird so gebrochen, dass der einfallende Strahl, der gebrochene Strahl und das Einfallsloth in Einer Ebene liegen, und sich der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels verhält, wie die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten Mittel zu der im zweiten.

2. Brechungsexponent. Wenn man die Geschwindigkeit des Lichtes im luftleeren Raume durch die Geschwindigkeit des Lichtes in irgend einem Mittel dividirt, so nennt man den so erhaltenen Quotienten den Brechungsexponenten dieses Mittels. Ist dieser Brechungsexponent n, und ist a der Einfallswinkel, α der Brechungswinkel, so ist

$$\sin a = n \sin \alpha.$$

Beispiel. Der Brechungsexponent der atmosphärischen Luft ist 1,0003, des Wassers $\frac{4}{3}$, des Kronglases (bleifreien Glases) $\frac{3}{2}$, des Flintglases (bleihaltigen Glases) $\frac{5}{3}$ bis 2, des Diamantes $\frac{5}{2}$. In der Regel (aber nicht immer) geht das Licht in einem dichteren Mittel langsamer als in einem dünnern.

3. Gränzwinkel. Wenn der Sinus des Einfallswinkels sich zur Einheit verhält, wie die Geschwindigkeit des Lichtes im ersten Mittel zu der im zweiten, so wird der Brechungswinkel ein rechter, und die gebrochenen Strahlen gleiten an der Gränzfläche beider Mittel hin. Ein

solcher Winkel heisst Gränzwinkel der Brechung, zum Beispiel von Flintglas zu Luft ist der Gränzwinkel 30⁰. Wenn der Einfallswinkel grösser ist als der Gränzwinkel der Brechung, so findet gar keine Brechung statt. Nur wenn die Geschwindigkeit des Lichtes sich beim Uebergange beschleunigt, kann es einen Gränzwinkel geben.

4. Theilung des Lichtes. Wenn Licht auf einen Körper fällt, so theilt es sich in drei Theile: ein Theil wird reflektirt, ein anderer gebrochen, ein dritter Theil wird absorbirt, das heisst, geht als Licht ganz 18 verloren. Nur wenn es einen Gränzwinkel der Brechung † giebt, und der Einfallswinkel grösser ist als dieser Gränzwinkel, wird alles Licht entweder reflektirt oder absorbirt; die Reflexion heisst dann Totalreflexion.

Wann heisst der Körper undurchsichtig, durchsichtig, schwarz, weiss? Giebt es Körper, die eine dieser Eigenschaften in vollkommenem Maasse besitzen?

5. Parallelglas. Durch ein von parallelen Ebenen begränztes Mittel wird jeder hindurchgehende Lichtstrahl zweimal und zwar so gebrochen, dass durch die zweite Brechung der Lichtstrahl dieselbe Richtung erlangt, die er ursprünglich hatte.

6. Prisma. Durch ein Mittel, welches von zwei nicht parallelen Ebenen begränzt wird, (durch ein Prisma) wird ein hindurchgehender Lichtstrahl zweimal so gebrochen, dass der einfallende Strahl und der herauskommende gehörig verlängert einen Winkel bilden. Dieser Winkel heisst der Ablenkungswinkel; der Winkel, welchen die beiden Ebenen gehörig erweitert bilden, heisst der brechende Winkel des Prismas. Ein Prisma, dessen brechender Winkel doppelt oder mehr als doppelt so gross ist als der Gränzwinkel der Brechung, lässt keinen Lichtstrahl hindurch.

7. Der wichtigste Fall für die Brechung durch ein Prisma ist der Fall, wo der einmal gebrochene Strahl in der senkrechten Durchschnittsebene des Prismas so liegt, dass er mit den Wänden des Prismas gleiche Winkel bildet. Ist dann u der Ablenkungswinkel, k der brechende Winkel des Prismas, so findet man leicht

$$\sin\frac{u+k}{2} = n \sin\frac{k}{2}.$$

Da nun der brechende Winkel des Prismas bekannt ist, so kann man aus dem Brechungsexponenten n den Ablenkungswinkel u, und umgekehrt aus dem Ablenkungswinkel u den Brechungsexponenten n bestimmen. Und in der That ist dies die Art, wie man den Brechungsexponenten durch Beobachtung bestimmt.

Durch Beobachtung ergiebt sich auch leicht, dass für den angegebenen Fall der Ablenkungswinkel kleiner und die Menge des hindurchgehenden Lichtes grösser ist als für jeden andern Fall.

§ 4. Die Farben.

1. Spektrum. Lässt man einen Sonnenstrahl auf ein Prisma fallen und fängt die von ihm gebrochenen Strahlen auf einer weissen Tafel auf, so erscheint statt des Lichtpunktes eine verschieden gefärbte Lichtlinie (das Spektrum), in welcher die Farben allmählich in einander übergehen, und in folgender Ordnung auf einander folgen:

Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, (Indigo), Violett,

wobei das äusserste Roth, wenn der Versuch bei möglichst klarer Luft angestellt wird, ganz denselben Farbeneindruck macht wie das äusserste Violett, und zwar liegen † die Farben so, dass das Roth die geringste, 19 das Violett die grösste Brechung erfahren hat. Lässt man einen dieser farbigen Strahlen, zum Beispiel den grünen, durch ein zweites Prisma gehen, so wird er nicht mehr in verschiedene Farben zerspalten; man nennt solche Farben, die durch ein Prisma nicht zerspalten werden, homogene. Sammelt man alle Farben des Spektrums auf einen Punkt, so erscheint wieder farbloses (weisses) Licht.

2. Complementärfarben. Zu jeder homogenen Farbe giebt es eine andere, welche mit ihr vermischt farbloses Licht giebt, man nennt zwei solche Farben Complementärfarben. Es lassen sich die Farben so auf den Umfang eines Kreises vertheilen, dass je zwei auf demselben Durchmesser stehende Farben Complementärfarben sind. Dann geben je zwei andere Farben des Kreises vermischt eine der Farben, die auf dem kürzeren der zwischenliegenden Bogen sich befinden. Zum Roth (Karmin) ist die Complementärfarbe Grün, zum Gelb (Gummigutt), Violett (Blauviolett), zum Blau (Himmelblau), Orange.

3. Dunkle Linien im Spektrum. Lässt man das Sonnenlicht durch zwei parallele hinter einander liegende Spalten auf ein Prisma, dessen Kante den Spalten parallel ist, und das so gebrochene Licht auf eine weisse Tafel fallen, welche mit der Kante des Prismas parallel ist, so erscheint das Sonnenspektrum in die Breite gezogen, und man bemerkt, bei sehr vollkommenen Apparaten, in dem Spektrum eine Reihe dunkler Linien, die der Kante des Prismas parallel sind. Fraunhofer zählte mehrere hundert solcher Linien, von denen er die deutlichsten mit den Buchstaben B, C, ... H bezeichnete. B und C liegen im Roth, D im Orange, E und F im Grün, G und H im Violett. Diese dunklen Linien, welche sich stets beim Sonnenlichte zeigen, liefern den Beweis, dass das Sonnenlicht nicht alle homogenen Farben enthält.

4. Aehnliche Erscheinungen zeigen sich, wenn man die durch glühende Körper hervorgebrachten Spektra betrachtet, nur dass man hier statt der vereinzelten dunklen Streifen, nur einzelne farbige Streifen erblickt, ein Beweis, dass das Licht derselben viel weniger Arten homogenen Lichtes enthält als das Sonnenlicht.

5. Durch die Fraunhoferschen Linien hat man ein Mittel, um die Farben und ihre Brechungsexponenten genau zu bestimmen; so zum Beispiel findet man für diejenigen Farben, welche zu den Fraunhoferschen Linien B, E und H (Roth, Grün, Violett) gehören, für Wasser die Brechungsexponenten 1,331 1,336 1,344.

6. Aus der ungleichen Brechbarkeit der verschiedenen homogenen Farben folgt, dass dieselben nicht mit gleicher Geschwindigkeit durch die Körper dringen.

Man nimmt an, dass die verschiedenen Farben durch den leeren Raum mit gleicher Geschwindigkeit hindurchgehen; ebenso auch durch die verschiedenen Luftarten, weil die Luft keine Farbenzerstreuung
20 hervorzubringen vermag. Dann aber folgt, dass unter den † verschiedenen Farben das Violett am schnellsten, das Roth am langsamsten die verschiedenen festen und flüssigen Körper durchläuft.

7. Wenn man weisses Sonnenlicht auf einen undurchsichtigen Körper fallen lässt, so heisst die Farbe, in welcher er dann erscheint, seine natürliche Farbe. Lässt man weisses Sonnenlicht auf einen durchsichtigen Körper fallen, so heisst die Farbe, welche die reflektirten Strahlen geben, die natürliche Farbe des Körpers im reflektirten Licht, hingegen die Farbe, welche die hindurchgehenden Strahlen geben, die natürliche Farbe des Körpers im durchgehenden Licht. Beide sind oft von einander verschieden.

Die natürlichen Körperfarben sind nie vollkommen homogen, sondern in der Regel aus einer Menge verschiedener homogener Farben zusammengesetzt. Doch giebt es einige durchsichtige Körper, welche im durchgehenden Lichte eine fast homogene Farbe zeigen. (Glas was durch Kupfer roth, oder durch Kobalt blau gefärbt ist.)

§ 5. Sphärische Spiegel.

1. Ein Segment einer Kugelfläche, dessen äussere oder innere Seite spiegelnd ist, heisst ein sphärischer Spiegel, und zwar im ersteren Falle ein konvexer oder ein Zerstreuungsspiegel, im zweiten ein konkaver oder ein Sammelspiegel (Brennspiegel, Hohlspiegel). Die gerade Linie, welche durch die Mitte des Spiegels und das Centrum der Kugel geht, heisst die Axe des Spiegels.

2. **Brennpunkt.** Es sei im Folgenden überall M die Mitte des Spiegels, C der Mittelpunkt der Kugel, also die gerade Linie CM die Axe, E der Einfallspunkt eines Strahles, ED die Tangente in E, welche die Axe in D trifft, F die Mitte von CD. Nimmt man nun einen Strahl AE an, welcher, der Axe parallel, in E einfällt, und zieht EF, so lässt sich leicht zeigen, dass der Einfallswinkel AEC dem Winkel CEF gleich, und also EF der reflektirte Strahl ist. Also wenn wir den Punkt D kurzweg den Durchschnittspunkt der Tangente nennen, so folgt:

Wenn der einfallende Strahl der Axe parallel ist, so durchschneidet der reflektirte Strahl die Axe in der Mitte zwischen dem Centrum und dem Durchschnittspunkt der Tangente.

Wenn der Einfallspunkt E am Rande des Spiegels liegt, so heisst der Punkt F der **Brennpunkt der Randstrahlen.** Wenn der Einfallspunkt E in die Mitte M des Spiegels hineinrückt, so fällt der Durchschnittspunkt D der Tangente mit E und A zusammen, und F fällt in die Mitte von CM. Deshalb heisst die Mitte von CM der **Brennpunkt der mittleren Strahlen,** oder kurzweg der **Brennpunkt des Spiegels.** Die Entfernung des Brennpunktes F vom Centrum nennt man die **Brennweite.**

3. **Bild eines Axenpunktes.** Fällt von einem Punkt A der Axe ein Strahl AE auf den Spiegel, und geht der reflektirte Strahl EB durch den Punkt B der Axe, so lässt sich, indem man in C eine Parallele mit der Tangente zieht, durch die Aehnlichkeit der so entstehenden rechtwinkligen Dreiecke leicht zeigen, dass die beiden Punkte A und B von dem Punkte C in demselben Verhältnisse abstehen wie von D. Man nennt vier solche Punkte einer geraden Linie, von denen zwei von dem dritten in demselben Verhältnisse abstehen wie vom vierten, vier harmonische Punkte, und zwar nennt man die ersten beiden einander zugeordnet, und ebenso die letzten beiden. Denken wir uns von A aus einen Strahlenkegel auf den Spiegel fallen, dessen Strahlen von der Axe unter demselben Winkel abstehen wie AE, so werden sich die reflektirten Strahlen alle in B vereinigen. Deshalb nennt man A und B Vereinigungspunkte. Also: 21

Die Vereinigungspunkte, das Centrum und der Durchschnittspunkt der Tangenten bilden vier harmonische Punkte, von denen die Vereinigungspunkte einander zugeordnet sind.

Nimmt man an, dass A vom Brennpunkte n Brennweiten entfernt liegt, so ergiebt sich leicht, dass B vom Brennpunkte $1/n$ Brennweite entfernt ist. Daraus folgt:

Die Brennweite ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfer-

nungen der Vereinigungspunkte vom Brennpunkte, und zwar liegen die Vereinigungspunkte vom Brennpunkte aus stets nach derselben Seite.

Bezeichnet man die Brennweite mit f und die Entfernungen DA und DB, welche man die Vereinigungsweiten nennt, mit a und b, so wird $FA = a - f$, $FB = b - f$, $FC = f$; und da FC die mittlere Proportionale zwischen FA und FB ist, so wird $(a - f)(b - f) = f^2$, woraus sich ergiebt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

das heisst:

Der reciproke Werth der Brennweite ist die Summe der reciproken Werthe der Vereinigungsweiten.

4. Fortrückung des Brennpunktes. Es sei E^1 ein Punkt am Rande des Spiegels, D^1 der zugehörige Durchschnittspunkt der Tangente, so wird, während sich E von E^1 nach M bewegt, der Punkt D sich von D^1 nach M bewegen, und der Brennpunkt F wird dabei einen halb so grossen Weg beschreiben wie D. Wenn die Oeffnung des Spiegels, das heisst der Bogen, den eine durch die Axe gelegte Ebene aus dem Spiegel herausschneidet, 5^0 beträgt, so beträgt die Entfernung D^1M nur etwa $^1/_{1000}$ des Halbmessers CM, also der Weg, den der Brennpunkt beschreibt, nur $^1/_{1000}$ der Brennweite, und bei noch geringerer Oeffnung sind diese Wege noch geringer. Man kann also bei so kleinen Oeffnungen ohne merklichen Fehler den Brennpunkt 22 und den † Durchschnittspunkt der Tangenten als feststehend, also auch den Punkt B als Bild des Punktes A annehmen. Ist die Oeffnung 180^0, und sind die einfallenden Strahlen parallel, so bilden die reflektirten die sogenannte Brennlinie oder catacaustica.

5. Bild eines Gegenstandes. Es sei A ein Punkt ausserhalb der Axe, AA_1 das auf die Axe gefällte Loth. Zieht man von A die Strahlen AM und AC, und an M die Tangente, welche den Strahl AC in D trifft, so kann man AC als Axe ansehen, D als Durchschnittspunkt der an M gezogenen Tangente mit der Axe, und AM als einfallenden Strahl; dann wird der reflektirte Strahl (Nr. 3) die Linie CA in einem Punkte B so schneiden, dass A, B, C, D vier harmonische Punkte sind. Projicirt man diese vier Punkte auf die Axe CM und nennt B_1 die Projektion von B auf diese Axe, so müssen die Projektionen A_1, B_1, C, M gleichfalls vier harmonische Punkte sein, also ist B_1 das Bild von A_1; also BB_1 das Bild von AA_1, das heisst, das Bild einer gegen die Axe senkrechten Linie ist wieder gegen die Axe senkrecht.

Ist der Gegenstand AA_1 vom Brennpunkte F n Brennweiten ent-

fernt, so ist (Nr. 3) das Bild BB_1 $1/n$ Brennweite entfernt; also beträgt die Entfernung des Gegenstandes von der Mitte des Spiegels $n + 1$ Brennweiten und die des Bildes $1 + 1/n$ Brennweite. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt aber, dass sich die Länge des Gegenstandes AA_1 zu der des Bildes wie diese Entfernungen verhalten, also wie $n + 1 : 1 + 1/n$, das heisst wie $1 : 1/n$. Also, zusammengefasst:

Wenn der Gegenstand n Brennweiten vom Brennpunkte entfernt ist, so ist das Bild nach derselben Seite hin $1/n$ *Brennweite entfernt und n-mal verkleinert; wenn der Gegenstand* $1/n$ *Brennweite vom Brennpunkt entfernt ist, so ist das Bild nach derselben Seite hin n Brennweiten entfernt und n-mal vergrössert. Ein gegen die Axe senkrechter Gegenstand giebt ein gegen die Axe senkrechtes Bild, und zwar ein umgekehrtes, wenn das Bild durch die reflektirten Strahlen selbst, ein aufrechtes, wenn es durch deren rückgängige Verlängerungen zu Stande kommt.*

Frage. Welches sind die Erscheinungen bei konkaven und bei konvexen Spiegeln, wenn der Gegenstand nach und nach dem Spiegel näher rückt?

§ 6. Sphärische Gläser.

1. Ein Glas, welches von den Segmenten zweier Kugelflächen, oder von einem solchen Segment und einer Ebene begränzt wird, heisst ein sphärisches Glas oder eine Linse.

Man unterscheidet zwei Hauptarten sphärischer Gläser: die Sammelgläser (Brenngläser), welche in der Mitte dicker sind als am Rande, und die Zerstreuungsgläser, welche in der Mitte dünner sind als am Rande. Die Sammelgläser sind entweder plan-konvex oder bikonvex oder konkav-konvex; die Zerstreuungsgläser sind entweder plan-konkav, oder bikonkav oder konvex-konkav. Die gerade Linie, welche durch die Mittelpunkte beider Kugelflächen oder durch den Mittelpunkt der Kugelfläche und senkrecht auf die Ebene gezogen ist, heisst die Axe des sphärischen Glases. 23

2. Erste Brechung. Man denke sich zuerst ein Segment einer Kugelfläche als Gränze zweier durchsichtigen Mittel, in welchen sich die Lichtgeschwindigkeiten verhalten wie $n:1$. Es sei wieder C das Centrum der Kugelfläche, E der Einfallspunkt, und seien A und B zwei Vereinigungspunkte in der Axe, das heisst zwei Axenpunkte der Art, dass, wenn AE der einfallende Strahl ist, EB der gebrochene ist. Man halbire den stumpfen Winkel AEB beider Strahlen durch die gerade Linie ED, welche die Axe in D trifft, so theilt diese bekanntlich die Grundseite des Dreiecks AEB im Verhältniss der Schenkel, das heisst hier im Verhältniss der beiden Strahlenlängen (von der Axe bis zum Einfallspunkt). Zieht man noch die Lothe AA_1, BB_1 auf den

(verlängerten) Radius CE, so sind diese Lothe durch die Längen der zugehörigen Strahlen dividirt die Sinus des Einfalls- und des Brechungswinkels, also der erste Quotient das n-fache des letztern

$$\frac{AA_1}{AE} = n\,\frac{BB_1}{EB}.$$

Nun verhalten sich aber, vermöge der Aehnlichkeit der entstandenen Dreiecke, jene Lothe wie die Entfernungen der Vereinigungspunkte vom Centrum, und die Strahlenlängen verhalten sich wie die Abschnitte, in welche AB durch D getheilt wird, also erhält man

$$\frac{AC}{AD} = n\,\frac{CB}{DB} \quad \text{oder} \quad \frac{AD+DC}{AD} = n\,\frac{DB-DC}{DB}.$$

Setzt man $DC = c$, $DB = b$, $AD = -a$ (oder, was dasselbe ist $DA = a$), so ergiebt sich leicht

$$\frac{n-1}{c} = \frac{n}{b} - \frac{1}{a}.$$

3. Wirkung beider Brechungen. Nimmt man jetzt die zweite Oberfläche hinzu, und setzt den Punkt, worin der einmal gebrochene Strahl EB diese Oberfläche trifft, E_1, so wird der Strahl EE_1 in E_1 zum zweiten Male gebrochen, dieser zweite gebrochene Strahl treffe die Axe in A_1, so sind B und A_1 die Vereinigungspunkte für die zweite Fläche. Man halbire wieder den Winkel EE_1A_1 und nehme an, diese Halbirungslinie treffe denselben Punkt D, ferner sei C_1 der Mittelpunkt der zweiten Kugelfläche, auch setze man, wie vorher $DA_1 = a_1$, $DC_1 = c_1$, während $DB = b$ bleibt, so hat man

24

$$\frac{n-1}{c_1} = \frac{n}{b} - \frac{1}{a_1}.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorher gefundenen, so erhält man

$$(n-1)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a}.$$

Es sei noch

$$(n-1)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right) = \frac{1}{f}$$

gesetzt, dann wird f die Brennweite genannt, und man hat die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a}.$$

4. Annäherungsformeln. Wir werden im Folgenden annehmen, dass die einfallenden Strahlen und also auch die gebrochenen nur sehr kleine Winkel mit der Axe bilden, und dass auch die Dicke des Glases gegen die Halbmesser der Kugelflächen sehr geringe sei. Unter dieser Voraussetzung wird auch der Punkt D sich von der Mitte des Glases nur sehr wenig entfernen, und die Linien c und c_1 werden den Radien



der Kugelflächen sehr nahe gleich sein. Wir nehmen den Punkt D der Axe in der Mitte zwischen den zwei begränzenden Kugelflächen an.

5. Brennpunkte. Die erste Gleichung

$$(n-1)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c_1}\right)=\frac{1}{f}$$

sagt, da c_1 und c bei Bikonvex- oder Bikonkav-Gläsern entgegengesetzt bezeichnet sind, und $1/c$ für eine Ebene gleich Null ist, aus:

Der reciproke Werth der Brennweite ist bei doppelt sphärischen Gläsern $(n-1)$-mal so gross als die Summe oder Differenz der reciproken Werthe der Radien, und zwar als die Summe, wenn die beiden Krümmungen gleichartig (beide konvex oder konkav), als die Differenz, wenn die beiden Krümmungen ungleichartig sind; bei sphärischen Gläsern, deren eine Begränzungsfläche eine Ebene ist, ist der Radius der andern $(n-1)$-mal so gross als die Brennweite.

Die Punkte der Axe, welche von der Mitte D des Glases um die Brennweite abstehen, heissen die Brennpunkte. Die Strahlen, welche der Axe parallel auf das Glas fallen, vereinigen sich bei Sammelgläsern im gegenüberstehenden Brennpunkte, bei Zerstreuungsgläsern werden sie so zerstreut, als kämen sie aus dem zunächstliegenden Brennpunkte.

6. Gesetz sphärischer Gläser. Aus der Formel

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a}$$

folgt:

Alle Gesetze der sphärischen Spiegel gelten (annähernd) auch für sphärische Gläser, nur dass die Bilder bei den letzteren auf der entgegengesetzten Seite † liegen; das heisst, denkt man sich bei den sphärischen Gläsern die Strahlen unmittelbar nach ihrem Durchgange von einem gegen die Axe senkrechten Spiegel reflektirt, so werden die Erscheinungen gleich denen für sphärische Spiegel. 25

Frage. Welches sind die Erscheinungen bei Sammelgläsern und bei Zerstreuungsgläsern, wenn der Gegenstand nach und nach dem Glase näher rückt?

§ 7. Das Auge und das Sehen.

1. Das menschliche Auge ist nahe kugelförmig und kann in der Augenhöhle durch sechs Muskeln um drei gegeneinander senkrechte Axen gedreht werden. Die äussere Hülle bildet die harte oder weisse Haut, welche vorne eine kreisrunde Oeffnung lässt, die von der stärker gewölbten, durchsichtigen Hornhaut ausgefüllt ist. An die harte Haut schliesst sich nach innen die Aderhaut an, welche bei den meisten Menschen mit einem schwarzen Farbestoff überzogen ist.

Auf der hinteren Seite treten durch eine Oeffnung die Sehnerven hinein und breiten sich über der Aderhaut zu einem zusammenhängenden Gewebe, der Netzhaut aus. In der Kreislinie, in welcher die harte Haut an die Hornhaut gränzt, schliesst sich die Regenbogenhaut (iris) als eine kreisförmige Scheibe an, die in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung, die Pupille, hat. Hinter der Iris befindet sich die durchsichtige Krystalllinse von der Gestalt einer Bikonvexlinse. Durch sie ist das Auge in zwei ungleiche Kammern getheilt, von denen die vordere eine wässrige, die hintere eine gallertartige Feuchtigkeit, die Glasfeuchtigkeit, enthält. Die wässrige Feuchtigkeit bricht das Licht am schwächsten, die Glasfeuchtigkeit etwas mehr, und am stärksten die Feuchtigkeit der Krystalllinse und besonders der hinteren Schicht, deren Brechungsexponent 1,4 ist.

2. Das Sehen. Das Licht fällt durch die durchsichtige Hornhaut, und durch die Pupille, welche sich bei stärkerem Lichte zusammenzieht, bei schwächerem erweitert, auf die Krystalllinse. Diese vereinigt bei deutlichem Sehen die von einem Punkte ausgehenden Strahlen auf einem Punkte der Netzhaut, von wo der Eindruck durch die Nerven der Seele zugeführt wird. Ist das Auge kurzsichtig, so vereinigen sich die von einem entfernten Punkte ausgehenden Strahlen schon ehe sie die Netzhaut treffen; ist das Auge weitsichtig, so konvergiren die von einem nahen Punkte kommenden Strahlen so, dass sie sich erst hinter der Netzhaut vereinigen würden. (Brillen.)

3. Durchkreuzungspunkt. Die Linien, welche von den sichtbaren Punkten nach ihren Bildern auf der Netzhaut gezogen werden, durchschneiden sich alle in einem Punkt, dem Mittelpunkte derjenigen Kugel, von der die Hornhaut ein Segment ist. Dieser Punkt wird der Durchkreuzungspunkt genannt.

26 4. Stereoskop. Die Bilder, welche ein naher Körper in den beiden Augen hervorbringt, sind im Allgemeinen nicht einander kongruent. Hat man zwei ebene Zeichnungen, von denen die eine das Bild, wie es dem einen Auge erscheint, und die andere das Bild, wie es dem andern Auge erscheint, darstellt, so gewähren diese Zeichnungen, wenn sie in die Lage gebracht werden, dass sie in den beiden Augen beziehlich dieselben Bilder hervorrufen wie jener Körper, zusammen denselben Eindruck wie der Körper selbst. — Stereoskop.

5. Dauer des Lichteindrucks. Der Lichteindruck dauert etwa $\frac{1}{5}$ Sekunde lang, nachdem der lichtgebende Gegenstand verschwunden ist, fort, oder nimmt wenigstens während dieser Zeit langsam ab, während er bald darauf verschwindet. Bei hellen Gegenständen dauert

der Lichteindruck etwas länger fort, bei dunkleren weniger lange (Farbenkreisel, stroboskopische Scheiben).

6. *Sphärische Abweichung.* Bei den sphärischen Spiegeln und Gläsern befolgen die das Bild erzeugenden Strahlen nicht mit vollkommener Genauigkeit die oben entwickelten Gesetze. Die Abweichung des wirklichen Bildes von dem Bilde, welches bei genauer Befolgung jener Gesetze hervorgehen müsste, heisst die *sphärische Abweichung.* Sie ist für die nahe an der Mitte auffallenden Strahlen am geringsten, und bei Spiegeln geringer als bei Gläsern.

7. *Achromatische Gläser.* Zu der sphärischen Abweichung kommt bei Gläsern noch eine Abweichung hinzu, welche dadurch bewirkt wird, dass die verschiedenen Farben ungleiche Brechbarkeit haben, wodurch es geschieht, dass die Bilder mit farbigen Rändern umgeben sind. (Chromatische Abweichung.) Man kann indessen diesen Mangel durch geschickte Zusammenfügung von Gläsern aus verschiedenen Substanzen, zum Beispiel aus Kronglas und Flintglas theilweise beseitigen. Indem nämlich diese die Farben auf sehr ungleiche Weise zerstreuen, so kann man stets eine Kronglas- und eine Flintglas-Linse so zusammenfügen, dass zwei beliebig zu wählende Farben durch die eine ebenso vereinigt werden, wie sie durch die andere zerstreut waren. Man wählt dazu den orangefarbenen und den grünen Strahl (Fraunhofers D und E). Eine solche Kombination zweier Linsen heisst eine achromatische Doppellinse.

§ 8. **Fernröhre und Mikroskope.**

1. Die *Fernröhre* und *Mikroskope* dienen dazu, um durch Vergrösserung des Winkels, unter dem ein fernes oder nahes Objekt erscheint, dasselbe dem Auge unterscheidbarer zu machen. Die Linse oder der Spiegel, welcher dem Objekte zunächst liegt, heisst das Objektiv, und die dem Auge zunächst liegende Linse das Okular. Das Verhältniss, in welchem die Tangente des Sehwinkels vergrössert wird, heisst die angulare † Vergrösserung. Im Folgenden sollen die Instrumente so beschrieben werden, wie sie für ein weitsichtiges Auge passen. 27

2. Das *astronomische* (Keplersche) Fernrohr besteht aus zwei Sammelgläsern, die um die Summe ihrer Brennweiten von einander abstehen, und von denen das Objektiv die grössere Brennweite hat. Das Bild erscheint umgekehrt, die Angularvergrösserung ist gleich dem Verhältniss der Brennweiten.

3. Ein *Erdfernrohr* erhält man durch Verbindung zweier astronomischer Fernröhre, indem das zweite das umgekehrte Bild des ersten wieder umkehrt, und dadurch ein aufrechtes Bild erzeugt.

4. Das Galileische Fernrohr besteht aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse von kürzerer Brennweite, welche um die Differenz der Brennweiten von einander abstehen. Das Bild erscheint aufrecht, die Angularvergrösserung ist gleich dem Verhältniss der Brennweiten.

5. Das Spiegelteleskop ist ein astronomisches Fernrohr, in welchem statt der Sammellinse, die das Objektiv bildet, ein Hohlspiegel eintritt. Bei dem Neutonschen Spiegelteleskop ins Besondere werden die vom Spiegel aus konvergirenden Strahlen kurz vorher, ehe sie das Bild hervorbringen, durch einen kleinen ebenen Spiegel, der unter 45° gegen die Axe des Hohlspiegels geneigt ist, seitwärts reflektirt und das so entstehende Bild seitwärts durch das Okular betrachtet.

6. Das Mikroskop besteht in seiner einfachsten Einrichtung aus zwei Sammelgläsern, von denen das Objektiv eine sehr kurze Brennweite hat. Der zu betrachtende Gegenstand wird etwas ausserhalb der Brennweite des Okulars aufgestellt, und das dadurch entstehende, umgekehrte Bild durch das Okular betrachtet, wobei für ein weitsichtiges Auge das Bild im Brennpunkt des Okulars liegen muss.

V. Zur Elektrodynamik.

Von

H. Grassmann in Stettin.

Crelles Journal Bd. 83, Heft 1, S. 57—64 (1877).

Das Gesetz über die gegenseitige Einwirkung zweier Stromtheile, welches ich im Jahre 1845 in Poggendorffs Annalen Bd. 64, S. 1 ff. {hier S. 147 ff.} im Gegensatze gegen das Ampèresche Gesetz als das muthmasslich richtige aufstellte, hat durch die neuesten bahnbrechenden Arbeiten von Herrn Clausius, namentlich durch seine Abhandlung in diesem Journal Bd. 82, S. 85 ff. nicht bloss eine neue Stütze, sondern, man kann sagen, eine sichere Begründung gefunden. In der That stimmt das Kraftgesetz für Stromelemente, wie Herr Clausius es S. 130 der erwähnten Abhandlung aus seiner allgemeinen Theorie ableitet, mit dem von mir a. a. O. dargestellten Gesetze genau überein.

Da Herr Clausius, dem meine oben erwähnte Abhandlung offenbar entgangen war, diese Uebereinstimmung in seinen Arbeiten (vergl. noch Poggendorffs Annalen Bd. 156, S. 657; Bd. 157, S. 489 und Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens Bd. 33) nicht erwähnt, so will ich sie hier kurz erörtern und daran einige, wie ich glaube, nicht unwichtige Folgerungen knüpfen.

Es ist äusserst leicht, die Uebereinstimmung beider Gesetze durch die in meinen Ausdehnungslehren (von 1844 und 1862) behandelte Analysis nachzuweisen; aber, da ich nicht voraussetzen darf, dass den Lesern die Gesetze dieser Analysis geläufig sind, so stütze ich mich zunächst nur auf die Sätze der gewöhnlichen Analysis, namentlich hier auf den Satz, dass, wenn a_1, a_2, a_3 die senkrechten Koordinaten und a die Länge einer Strecke, und b_1, b_2, b_3 die entsprechenden Koordinaten und b die Länge einer zweiten Strecke sind, dann der Cosinus des

Winkels zwischen den Richtungen beider Strecken, den ich nach hergebrachter Weise mit $\cos(ab)$ bezeichne,

$$\cos(ab) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{ab}$$

ist.

Sind nun bei senkrechtem Koordinatensystem dx', dy', dz' die Koordinaten und ds' die Länge eines Stromelementes, dx, dy, dz die Koordinaten und ds die Länge eines zweites Stromelementes, X, Y, Z die Koordinaten der Kraft, mit der das erstgenannte Element auf das 58 zweite wirkt, sind † ferner x', y', z' die Koordinaten des Anfangspunktes des ersten, x, y, z die Koordinaten des Anfangspunktes des zweiten Elementes, also $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ die Koordinaten der Strecke, die von dem erstgenannten Anfangspunkte nach dem letzten gezogen wird, und ist r die Länge dieser Strecke, also

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2,$$

sind ferner i und i' die beiden Stromintensitäten, ε der Winkel zwischen den beiden Stromelementen und k ein konstanter Zahlenfaktor, so ist nach Clausius a. a. O. S. 130

$$(1) \qquad X = kii'\, ds\, ds' \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} \cos\varepsilon - \frac{d\frac{1}{r}}{ds} \frac{dx'}{ds'} \right).$$

Nun ist

$$d\frac{1}{r} = -\frac{r\,dr}{r^3} = -\frac{d(r^2)}{2r^3} = -\frac{d[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}{2r^3}.$$

Also ist

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dx} = -\frac{x - x'}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{ds} ds = -[(x-x')dx + (y-y')dy + (z-z')dz] : r^3.$$

Ferner ist

$$\cos\varepsilon = (dx\,.\,dx' + dy\,.\,dy' + dz\,.\,dz') : ds\,.\,ds'.$$

Diese Werthe in (1) eingesetzt, erhält man

$$X = -\frac{kii'}{r^3}\{(x-x')\,\Sigma\, dx dx' - dx'\,\Sigma\,(x-x')dx\}$$

und entsprechend sind die Ausdrücke für Y und Z.

Nimmt man die z-Axe senkrecht gegen die Ebene an, in welcher r und ds' liegen, so wird $z - z' = 0$ und $dz' = 0$, also auch $Z = 0$. Wir können daher die genannte Ebene die Wirkungsebene nennen; die Formel für X wird dann

$$X = -\frac{kii'}{r^3}\{(x-x')(dx\, dx' + dy\, dy') - [(x-x')dx + (y-y')dy]dx'\}$$

und entsprechend für Y.

Nun sei, wie in meiner Abhandlung *Poggendorffs Annalen* Bd. 64, S. 9 {hier S. 153 f.} das Produkt $i'ds'$ mit a, das Produkt ids mit b, und die (senkrechte) Projektion von b auf die Wirkungsebene mit b_1 bezeichnet, ferner sei der Winkel

$$\angle ra = \alpha, \quad \angle rb_1 = \beta, \quad \angle b_1 a = \gamma$$

gesetzt, sodass also

$$\alpha = \angle rb_1 + \angle b_1 a = \beta + \gamma$$

ist. Man nehme die y-Axe in der Richtung b_1, und die x-Axe in der dagegen senkrechten, in der Wirkungsebene liegenden Richtung c an, und zwar so, † dass $\angle b_1 c = +90^0$ ist. Dann sind also $i'dx'$ und 59 $i'dy'$ die Koordinaten von a, idx und idy die von b, also

$$\cos\gamma = \cos(b_1 a) = \frac{ii'(dx\,dx' + dy\,dy')}{ab_1}$$

und

$$\cos\beta = \cos(rb_1) = \frac{i(x-x')dx + i(y-y')dy}{rb_1}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird

$$X = -\frac{k}{r^3}[(x-x')ab_1\cos\gamma - i'\,dx'\,rb_1\cos\beta],$$

$$Y = -\frac{k}{r^3}[(y-y')ab_1\cos\gamma - i'\,dy'\,rb_1\cos\beta].$$

Nnn ist $y - y'$ die Projektion von r auf b_1, also gleich

$$r\cos(rb_1) = r\cos\beta,$$

und $i'dy'$ die Projektion von a auf b_1, also gleich $a\cos(b_1 a) = a\cos\gamma$, also

$$Y = -\frac{kab_1}{r^2}(\cos\beta\cos\gamma - \cos\gamma\cos\beta) = 0.$$

Ferner ist $x - x'$ die Projektion von r auf c, also gleich

$$r\cos(rc) = r\cos(rb_1 + b_1 c) = r\cos(90^0 + \beta) = -r\sin\beta,$$

und $i'dx'$ ist die Projektion von a auf c, also gleich

$$a\cos(ac) = a\cos(ab_1 + b_1 c) = a\cos(b_1 c - b_1 a)$$
$$= a\cos(90^0 - \gamma) = a\sin\gamma,$$

also

$$X = \frac{kab_1}{r^2}(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = \frac{kab_1}{r^2}\sin(\beta+\gamma),$$

also

$$X = \frac{kab_1}{r^2}\sin\alpha. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck stellt, da Y und Z null sind, die ganze Kraft dar. Er ist mit dem Ausdrucke, den ich in *Poggendorffs Annalen* Bd. 64, S. 9, Formel 4 {hier S. 154} mitgetheilt habe, identisch, nur

dass k, dessen Werth von der Annahme der Einheiten abhängig ist, dort selbst als Einheit gesetzt war.

Es gewinnt aber diese Formel (2) durch das von Herrn Clausius erwiesene Grundgesetz eine ganz neue Bedeutung. Sie stellt nun nicht mehr eine Hypothese dar, welcher andere Hypothesen vielleicht mit gleicher Berechtigung zur Seite gestellt werden können, sondern ergiebt sich nach der Clausiusschen Darstellung als nothwendig. Um dies zu zeigen und daran noch andere Folgerungen zu knüpfen, will ich hier den Gang der Clausiusschen Darstellung kurz zur Anschauung bringen.

60 Herr Clausius weist nach, † dass das Grundgesetz, welches der Begründer einer einheitlichen Theorie der Elektrodynamik, Herr W. Weber, aufgestellt hat, nur unter *der* Voraussetzung mit der Erfahrung im Einklange ist, dass sich in jedem galvanischen Strome die positive und negative Elektricität mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Er zeigt namentlich, dass, wenn in einem galvanischen Strome die entgegengesetzten Elektricitäten sich mit ungleicher Geschwindigkeit bewegen (zum Beispiel die negative ruht), dann bei Zugrundelegung des Weberschen Gesetzes der konstante Strom auf ruhende Elektricität vertheilend wirken müsse, was der Erfahrung widerspricht.

Ich bemerke, dass man diesen Nachweis auf eine höchst elementare Weise vermittelst eines linearen Stromes führen kann, der aus zwei koncentrischen Kreisbogen und zwei geraden Strecken besteht, wenn nämlich das gemeinsame Centrum der beiden Kreisbogen in dem Punkte liegt, in welchem die Elektricität ruht, und die beiden Strecken verlängert durch denselben Punkt gehen. In diesem Falle zeigt der blosse Anblick der Weberschen Formel

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

dass der positive Strom (abgesehen von der statischen Wirkung, die sich gegen die des negativen stets aufhebt) auf die ruhende positive Elektricität eine anziehende durch die Mitte des Stromes gehende Wirkung übt, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit $\left[\frac{dr}{dt}\right]$ proportional ist, während die negative Elektricität ebenso stark abgestossen wird, dass hingegen der negative Strom die Wirkungen in entgegengesetztem Sinne übt, aber so, dass diese Wirkungen dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die negative Elektricität strömt, proportional sind. Die Gesammtwirkung ist also nur dann null, wenn beide Geschwindigkeiten gleich gross sind, in jedem anderen Falle müsste

eine Vertheilung der ruhenden Elektricität im Widerspruche mit der Erfahrung stattfinden.

Das Entsprechende weist Herr Clausius für das Riemannsche Grundgesetz nach. Beide würden also nur für den Fall mit der Erfahrung übereinstimmen, wenn sich annehmen liesse, dass in jedem galvanischen Strome positive und negative Elektricität mit *gleicher* Geschwindigkeit (nach entgegengesetzten Richtungen) strömten. Diese Annahme ist jedoch nicht gestattet, da zum Beispiel in Elektrolyten die Elektricitäten sich mit den Ionen bewegen, und diese im Allgemeinen ungleiche Geschwindigkeit besitzen.

61 Nun geht Herr Clausius von der auch bei dem Weberschen und Riemannschen Gesetze zu Grunde liegenden Annahme aus, dass die Kraft, mit der ein sich bewegendes Elektricitätstheilchen e' auf ein anderes e wirkt, nur von der gegenseitigen Entfernung der beiden Theilchen und von der Richtung und Grösse ihrer Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhänge. Indem er nun hiermit nur die Resultate sicherer Beobachtungen und das Princip der Erhaltung der Energie in Verbindung setzt, gelangt er zu seiner Fundamentalformel (66), in welcher jedoch noch eine unbekannte Funktion von r vorkommt. Diese unbekannte Funktion hebt sich aber, wenn man die Kraft bestimmt, mit welcher ein Stromelement ds' auf ein anderes ds wirkt, von selbst weg, und so gelangt man zu der Gleichung (1) und zu der ihr gleichbedeutenden (2), welche also als vollkommen begründet angesehen werden müssen, sobald man nicht etwa auf höhere als die zweiten Zeitdifferentiale der bewegten Elektricitäten zurückgehen will.

Hierbei ist zu bemerken, dass die Formeln (1) und (2) auch geltend bleiben, wenn die beiden entgegengesetzten nach entgegengesetzter Richtung strömenden Elektricitäten nicht dieselbe Geschwindigkeit haben, dass aber dann unter Intensität des Stromes die Summe der positiven und der in entgegengesetzter Richtung strömenden negativen Elektricität zu verstehen ist, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters strömen.

Ich schliesse hieran eine ganz elementare Ableitung der Wirkung eines konstanten geschlossenen Stromes auf ein Stromelement, welche zugleich zu Resultaten führt, die, wie ich glaube, bisher unbekannt gewesen sind.

Wenn man in (2) statt a seinen Werth $i'ds'$ setzt, so findet man durch Integration sogleich die Kraft v, welche eine mit der Intensität i' durchströmte Strecke BC auf ein Stromelement übt, dessen Anfangspunkt in A liegt, und dessen Projektion auf die Ebene ABC gleich b_1 ist. Nämlich wenn $AD = h$ die Höhe des Dreiecks ABC ist, und

die Stücke des Dreiecks in hergebrachter Weise benannt werden, so ist

$$v = \frac{ki'b_1}{h}(\cos\beta + \cos\gamma).$$

Wenn ins Besondere b_1 mit BC gleichgerichtet ist, so hat v die Richtung von AD; und wenn sich b_1 um einen beliebigen Winkel in der Wirkungsebene dreht, so dreht sich die Richtung von v um denselben Winkel, während der Werth von v derselbe bleibt. Wenn α der dritte 62 Winkel des Dreiecks † und m die Mittellinie ist, welche diesen Winkel hälftet und bis zur gegenüberliegenden Seite reicht, so ist bekanntlich

$$\frac{\cos\beta + \cos\gamma}{h} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{m}$$

und die obige Formel wird

$$v = \frac{2ki'b_1 \sin\frac{1}{2}\alpha}{m}. \tag{3}$$

Um aber diese Formel unmittelbar benutzen zu können, ist es nothwendig, in ihr auch die Richtung der Kraft v darzustellen. Zu dem Ende muss ich auf einige Begriffe der geometrischen Analysis zurückgehen, wie ich sie in meinen Ausdehnungslehren von 1844 und 1862 dargestellt habe, nämlich auf den Begriff der Strecken, der Flächenräume, auf die Addition der Strecken und Flächenräume und auf das innere Produkt des Flächenraums in die Strecke.

Nämlich zwei begrenzte gerade Linien setze ich als *Strecken* nur dann gleich, wenn sie gleiche Länge und Richtung haben, und zwei Ebenentheile setze ich als *Flächenräume* nur dann gleich, wenn die beiden Ebenen parallel sind und die Ebenentheile gleichen und gleichbezeichneten Flächeninhalt haben. Zwei Strecken werden *addirt*, indem man sie stetig aneinander legt, dann ist die Strecke vom Anfangspunkt der ersten zum Endpunkt der letzten die Summe beider Strecken. Zwei Flächenräume werden addirt, indem man sie als Parallelogramme stetig aneinanderlegt, das heisst sie so legt, dass die Grundseite des zweiten mit der Deckseite (der der Grundseite gegenüberliegenden Seite) des ersten zusammenfällt, dann ist das Parallelogramm, dessen Grundseite die Grundseite des ersten und dessen Deckseite die Deckseite des zweiten Parallogramms ist, die Summe der beiden Flächenräume. Endlich unter dem *inneren Produkte* eines Flächenraums F, dessen Inhalt Eins ist, in eine Strecke b, geschrieben $[F \mid b]$ verstehe ich eine Strecke g, welche mit der Projektion b_1 von b auf F gleich lang ist, welche in der Ebene F auf b_1 (also auch auf b) senkrecht steht, und welche an b_1 stetig angelegt nach derselben Seite hin abbiegt, nach welcher der Umfang von F durchlaufen wird. Setzt man λF statt F, wo λ den Flächeninhalt ausdrückt, so wird $[\lambda F \mid b] = \lambda g$.

Wenden wir dies auf den obigen Fall an, und setzen fest, dass F mit dem Flächenraum des Dreiecks ABC gleichbezeichnet sei, so ist klar, dass nach dem Obigen die Richtung der Kraft mit $[F \mid b]$ entgegengesetzt bezeichnet sei, und also, wenn die Richtung der Kraft zugleich ausgedrückt † werden soll, in (3) statt b_1 zu setzen ist 63 $-[F \mid b]$, das heisst

$$(4) \qquad v = -\frac{2ki' \sin\frac{1}{2}\alpha}{m}[F \mid b].$$

Nun durchströme der galvanische Strom ein beliebiges Raumpolygon, dessen eine Seite BC ist, während A der Anfangspunkt des Stromelementes b bleibt. Für das sich an ABC anschliessende Dreieck sei α_1 statt α, m_1 statt m und F_1 statt F gesetzt, u. s. w., so ist die Kraft V, mit der das ganze Polygon auf das Stromelement b wirkt,

$$(5) \qquad \begin{cases} V = -2ki'[Q \mid b], \\ \text{wo} \\ Q = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{m}F + \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_1}{m_1}F_1 + \cdots. \end{cases}$$

Diese Gleichung schliesst folgenden wichtigen Satz ein:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so giebt es zu jedem Punkte A eine bestimmte Ebene, die man durch A gehend annehmen, und die Wirkungsebene des Stromes in Bezug auf den Punkt A nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes von A ausgehende Stromelement (b) erstens, wenn es auf dieser Ebene senkrecht steht, keine Einwirkung durch den Strom erfährt, zweitens, wenn es schräge darauf steht, dieselbe Wirkung erleidet wie seine (senkrechte) Projektion (b_1) auf diese Ebene erleiden würde, drittens, dass die Kraft, die es erfährt, in dieser Ebene liegt und auf der Projektion (b_1) des Stromelementes und also auch auf diesem selbst senkrecht steht, und viertens dass, wenn g die Kraft ist, welche jenes (von A ausgehende) Stromelement (b) in irgend einer Lage erfährt, und sich die Projektion (b_1) des Stromelementes auf die Wirkungsebene um irgend einen Winkel in dieser Ebene dreht, dann auch die Kraft g ohne ihren Werth zu verändern sich um denselben Winkel dreht."

Diese Wirkungsebene ist, wenn der Strom ein Polygonstrom im Raume ist, aufs leichteste zu konstruiren. Denn sie ist parallel mit Q, und Q ist nach Formel (5) durch Addition der Flächenräume unmittelbar zu finden.

Viel bequemer als der hier eingeschlagene Weg wird die Methode, wenn man gleich von Anfang die geometrische Analysis einführt. Aber dann ist noch der Begriff des äusseren Produktes zweier Strecken ein-

zuführen. Ich verstehe nämlich unter dem äusseren Produkt $[ab]$ zweier Strecken a und b den Flächenraum des Parallelogramms, welches 64 a zur † Grundseite und b zur sich daran anschliessenden Seite hat. Dann ergiebt sich, was ich hier nicht nachweisen will, aus Formel (1) unmittelbar die Formel

$$P = \frac{k}{r^3} [\underline{r}\underline{a} \mid \underline{b}], \tag{2*}$$

wo $\underline{r}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ die Strecken selbst darstellen, deren Längen wir oben mit r, a, b bezeichneten, und wo P die Kraft ihrer Grösse und Richtung nach ist.

Setzen wir hier $\underline{a} = i'\underline{ds}'$, wo wieder $\underline{ds}'$ zugleich die Richtung des Stromelementes ds' darstellt und nehmen $\underline{ds}'$ als Element eines beliebigen geschlossenen Stromes, so erhalten wir, wenn man die Integration auf den ganzen geschlossenen Strom ausdehnt,

$$V = ki' [Q \mid \underline{b}], \quad \text{wo} \quad Q = \int \frac{[\underline{r}\,\underline{ds}']}{r^3} \tag{5*}$$

ist.

Es hat hier wie überall nicht die mindeste Schwierigkeit, die Formeln der geometrischen Analysis unmittelbar in die in der Regel sehr viel komplicirteren Formeln der gewöhnlichen Analysis umzusetzen. Man hat zu dem Ende nur auf den drei gegeneinander senkrechten Koordinatenaxen drei Strecken anzunehmen, deren Richtungen die der positiven Axen und deren Längen Eins sind, diese seien e_1, e_2, e_3; sind dann a_1, a_2, a_3 die Koordinaten einer Strecke a, so hat man nur statt a zu setzen $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Wendet man dies Verfahren bei jeder Strecke an und führt dann die Additionen und Multiplikationen nach den gewöhnlichen Gesetzen der Algebra aus, nur dass man die Faktoren eines Produktes nicht ohne Weiteres vertauscht und zusammenfasst, so bleiben in der Formel keine anderen Strecken übrig als e_1, e_2, e_3, deren Multiplikation, sei sie eine äussere oder innere, nach den Definitionen dieser Produkte auszuführen ist. In unserer Formel (5*) erhält man dann V zuletzt in der Form

$$V = V_1 e_1 + V_2 e_2 + V_3 e_3,$$

wo dann V_1, V_2, V_3 die gesuchten algebraischen Ausdrücke sind.

Stettin, den 10. Januar 1877.

Va. Selbstanzeige der Abhandlung:

Zur Elektrodynamik.

Koenigsbergers Repertorium Bd. II, S. 3—4, Leipzig 1879.

Im Jahre 1845 hatte ich in Poggendorffs Annalen Bd. 64, S. 1ff. {hier S. 147ff.} für die Einwirkung eines unendlich kleinen elektrischen Stromtheiles auf einen andern eine Formel aufgestellt, welche von der Ampèreschen wesentlich abweicht und sich durch ihre grössere Einfachheit auszeichnet. Nun hat Herr Clausius kürzlich eine neue, auf sicherer Grundlage ruhende Theorie der Elektrodynamik in dem Journal für Mathematik Bd. 82, S. 85ff. aufgestellt, aus welcher sich mir durch eine kurze Rechnung ergab, dass diese Theorie auf die gegenseitige Einwirkung unendlich kleiner elektrischer Stromtheile angewandt genau dieselbe Formel ergab, welche ich 1845 als die muthmasslich richtige aufgestellt hatte.

Sind nämlich AA_1 und BB_1 unendlich kleine Stücke elektrischer Ströme und i' und i ihre Intensitäten, und wird $i'AA_1$ mit a, iBB_1 mit b, die senkrechte Projektion von b auf die Ebene von AA_1B mit b_1, AB mit r und Winkel A_1AB mit α bezeichnet, so ergab sich als Einwirkung X des ersten Stromtheils auf den zweiten, abgesehen von einem konstanten Zahlfaktor, die Formel

$$X = \frac{a b_1 \sin \alpha}{r^2},$$

wie ich sie in Poggendorffs Annalen a. a. O. aufgestellt habe. Hier liegt X senkrecht gegen b_1 in der Ebene AA_1B.

Ich habe nachgewiesen, dass die Formel aus der Clausiusschen Theorie mit Nothwendigkeit hervorgeht. Ferner habe ich aus dieser Formel auf ganz elementare Weise die Wirkung abgeleitet, welche ein konstanter geschlossener Strom im Raume auf einen Stromtheil übt.

Ich betrachte nämlich jenen geschlossenen Strom zunächst als ein durchströmtes Polygon. Ist BC irgend eine Seite desselben, i' die Intensität des Stromes und A der Anfangspunkt eines unendlich kleinen Stromtheiles, dessen senkrechte Projektion auf ABC gleich b_1 ist, so ergiebt sich die Wirkung v:

$$v = \frac{2 i' b_1 \sin \frac{1}{2}\alpha}{m},$$

wo $\alpha = \angle BAC$ und m die von A nach BC gezogene Linie ist, welche den Winkel α halbiert. Die Richtung von v ist senkrecht auf b_1 in der Ebene ABC. Ist v_1 die Wirkung der nächstfolgenden Seite des

Polygons, und so weiter, so wird die gesammte Wirkung V jenes Polygons

$$V = v + v_1 + \cdots,$$

4 wo die Addition auf der rechten Seite die geometrische ist. Eine sehr einfache, auf die Ausdehnungslehre gegründete Betrachtung ergiebt dann den allgemeinen Satz:

„Wenn ein beliebiger geschlossener Strom im Raume gegeben ist, so giebt es zu jedem Punkt A eine bestimmte Ebene, die man die Wirkungsebene des Stromes nennen kann, und welche die Eigenschaft hat, dass jedes durch A gehende Stromelement durch jenen Strom dieselbe Wirkung erfährt wie seine senkrechte Projektion auf die Wirkungsebene, ferner dass diese Wirkung in der Wirkungsebene senkrecht gegen das Stromelement erfolgt und ihrer Grösse nach unabhängig von der Richtung jener Projektion ist.“

Stettin. **H. Grassmann.**

VI.

Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen. 85

Anhang*) zu W. Preyers Elementen der reinen Empfindungslehre, Jena, Verlag von Hermann Dufft, 1877.

Die einfachen Lichtempfindungen sind Gebiete dritter Stufe und werden am vollkommensten dargestellt durch (ungleich intensive) Punkte einer Ebene; auch kann man die Intensitäten dieser Punkte durch Strecken, die in ihnen als Lothe auf der Ebene errichtet sind, sichtbar machen. Diese Eigenthümlichkeit der Lichtempfindungen, die ich in meiner Theorie der Farbenmischungen**) aufgestellt habe, ist auch von Helmholtz***) vollständig anerkannt.

Bei der Intensität Null hört, wie überall, jede Qualität auf, Schwarz ist eben keine Qualität, sondern † das Null des 86 Lichtes.

In der Qualität tritt erstens der Farbenton hervor in der Reihe:

---

*) Der Anhang steht auf S. 85—93 des Werkes und ist bezeichnet als: „Briefliche Mittheilung an den Verfasser von Professor Dr. H. Grassmann in Stettin." Preyer sagt in einer Anmerkung unterm Texte:

Professor Grassmann hatte die Güte, nachdem ich im Frühjahr 1876 ihm meine Anwendungen seiner Ausdehnungslehre auf die Empfindungen mitgetheilt hatte, in einem ausführlichen Schreiben mir anzugeben, worin er beistimmt, worin nicht. Namentlich seine Darstellung der Mannigfaltigkeit der Farbenempfindung weicht von der meinigen durchaus ab. Einige seiner Bemerkungen darüber füge ich zum Vergleich meiner Arbeit bei. Prof. Grassmann nimmt für die einfache reine Farbenempfindung drei Urvariable an, Intensität, Ton und Sättigung, ich nur zwei, indem ich zu zeigen versuchte, dass, wenn Intensität und Ton gegeben sind, die Sättigung zugleich mitgegeben ist. Prof. Grassmanns Darstellung passt vortrefflich auf die Mischung **objektiver** Farben, und zum Theil auch zu dem, was ich von der Empfindung des Kontrastes als eines Multiplikationsaktes im wahrnehmenden Subjekte aufgestellt habe.

**) Poggendorff's Annalen 89. Bd. 1853 {hier S. 161—173}.

***) Handbuch der physiologischen Optik, S. 281 ff.

Roth, Gelb, Grün, Blau, Violett, was sich wieder an Roth anschliesst (Braun ist nur ein wenig intensives Roth), und zweitens die Ausgleichung der Farbendifferenzen (sei es durch Vermischung entgegengesetzter, das heisst complementärer Farben, sei es durch Abnehmen oder Aufhören des Unterscheidungsvermögens für die Farbenverschiedenheit). Durch vollständige Ausgleichung entgegengesetzter Farben entsteht das farblose Licht (Grau, Weiss).

Ferner. Grün lässt sich wohl als Farben-Mitte, das heisst als Mittel zwischen der tiefsten und höchsten Farbenempfindung auffassen. Der Nullpunkt der Farbenempfindung tritt aber in der Empfindung des farblosen Lichtes, sowie in der des gänzlichen Lichtmangels hervor, also in der Reihe: Schwarz, Grau, Weiss mit ihren Abstufungen. Daraus folgt aber sogleich der Begriff der negativen Farben. Nämlich zu jeder Farbe muss die entsprechende negative die sein, welche zu ihr addirt, das heisst mit ihr vermischt, Weiss giebt, das heisst die Complementärfarbe. Es sind also die Complementärfarben durch entgegengesetzte (aber gleich lange) Strecken der Ebene anschaulich darstellbar.

Ausser jenem Null der Farbe, das heisst dem farblosen Lichte, giebt es aber auf dem Gebiete der Lichtempfindungen noch ein zweites von jenem und vom Null der gesammten Intensität verschiedenes Null, das ist eben das Null des farblosen Lichtes.

Eine Farbe, welcher kein farbloses Licht beigemischt ist, heisst eine gesättigte. Objektiv wird diese Sättigung erreicht durch die reinen prismatischen Farben. Allein da wir diese nicht unmittelbar wahrnehmen, sondern nur durch das Medium des Auges, in diesem aber durch eine grosse Reihe sekundärer Vorgänge (Brechung, Zurückwerfung, Absorption, Fluorescenz) das dem Auge zugesandte Licht vielfache objektive Aenderung erleidet, ehe es zu den Nervenenden, welche die Empfindung aufnehmen, gelangt, so ist es wahrscheinlich, dass wir die Empfindung gesättigten Lichtes nur annäherungsweise erfahren, also das Null des farblosen Lichtes in der Empfindung nicht vollkommen erreicht wird, am vollkommensten wohl, wenn die durch Blicken auf ein sehr helles farbiges Licht hierfür abgestumpfte Stelle der Netzhaut nun nach Erlöschen jenes Eindrucks durch Hinblicken auf eine möglichst gesättigte Complementärfarbe, diese empfängt, also in den sogenannten negativen Nachbildern.

87 Die Aenderung der Qualität bei der Steigerung einer Farbe ist ein sekundärer Vorgang, der eines Theils in einer objektiven Ver-

änderung des Lichtes durch Brechung, Zurückwerfung, Absorption und Fluorescenz im Auge selbst besteht, ehe noch das Licht die Empfindungsorgane erreicht, andern Theils auf einer subjektiv sehr verschiedenen und bisher noch sehr wenig erforschten Unempfänglichkeit der Nerven für Farben- und Intensitätsunterschiede, auf einer relativen Farbenblindheit beruht.

So viel scheint sicher, dass diese Erscheinungen nur sekundärer, zum Theil subjektiver Art sind.

Dagegen bewegen wir uns in der Theorie der Farbenmischung auf einem sicheren, den objektiven Erscheinungen überall Rechnung tragenden Gebiet, und muss dies daher die Grundlage für die Theorie der reinen Lichtempfindungen sein. Zunächst erhalten wir dadurch einen, und zwar den einzigen aus blosser Lichtempfindung ableitbaren, festen Maassstab für die Bestimmung der gleichen Intensität verschiedener Farben.

Mischt man zum Beispiel Gelb von der Wellenlänge 567,1 mmm (mmm bedeutet Millionstel Meter) mit Indigo von 472,6 mmm, und zwar in dem Intensitätsverhältnisse, dass sie farbloses Licht geben, so haben wir diese beiden Intensitäten (nach dem Obigen) als gleich gross anzusehen, und sie erweisen sich auch objektiv (wenn man die Lichtstärke nach Helmholtz durch die bei der Absorption entstehende Wärme bestimmt) als gleich, und bleiben es auch, wenn man die beiden Intensitäten in beliebigem, aber gleichem Verhältnisse ändert; denn wäre letzteres nicht der Fall, so müsste man durch Vermischung zweier farbloser Lichter farbiges erzeugen können, was unmöglich ist.

Betrachte ich nun eine dritte Farbe, etwa Goldgelb von 585,2 und das complementäre Cyanblau von 485,4 mmm, und bestimme ihre Intensitäten so, dass sie beide zusammengemischt ebensoviel Weiss geben, wie vorher Gelb und Indigo, so haben wir vier Farben, die als intensiv gleich zu betrachten sind. Dass sie auch objektiv gleich sein müssen, folgt aus dem Satze (Helmholtz S. 309): „Wenn Licht aus verschiedener Quelle zusammentrifft, so wird die Gesammtintensität gleich der Summe der einzelnen Intensitäten“ (vergl. meine Abhandlung*) S. 82). Denn da nun in beiden Mischungen die Summen der Intensitäten gleich sind, und die beiden Intensitäten, aus denen jede dieser Summen entsteht, so müssen alle vier so bestimmten Farben objektiv † gleiche Intensitäten haben. 88

So kann man für alle Spektralfarben, die eine Complementärfarbe besitzen, ihre gleiche Intensität nachweisen, und also auch die Ver-

*) Poggendorffs Annalen 89. Band. 1853. {Hier S. 171.}

hältnisse ihrer Intensität. Für Grün kann man dann die gleiche Intensität objektiv bestimmen. So würde man schon einen Farbenkreis erhalten, an dem nur diejenigen Farben fehlen würden, die im Spektrum zu fehlen scheinen, nämlich Purpur mit seinen Abstufungen.

Aber ich glaube, dass auch diese Lücke nur eine scheinbare ist. Setzt man das äusserste Roth von 812,5 mmm mit dem Violett von 406,2 also mit seiner Octave zusammen, so entsteht ein Roth, was einen ebenso gesättigten Eindruck macht wie die anderen Spektralfarben; wenn man jenes Violett recht dunkel nimmt, so geht es (nach Helmholtz) in Rosaroth, also, abgesehen von dem durch Fluorescenz beigemischten Weiss, in Purpur über, und ich glaube, dass diese beiden um eine Octave verschiedenen Farben, wenn man die sekundären Einflüsse entfernen könnte, denselben Eindruck hervorrufen, und also in ihrer Verbindung eine gesättigte Farbe gleich denen des Prisma geben müssen. Aber auch abgesehen davon lässt sich jene, jedenfalls nur sehr geringe Lücke annäherungsweise herstellen und dadurch der Farbenkreis vollenden.

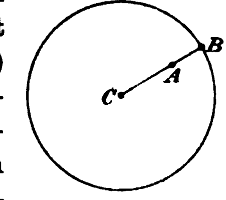
Aber die Stellung der Farben in diesem Kreise ist dadurch noch nicht festgestellt. Um sie festzustellen ist zuerst festzuhalten, dass jede Lichtempfindung sich (Helmholtz S. 282, Z. 3—7, meine Abh. S. 71, Z. 1—3 {hier S. 162, Z. 15—13 v. u.}) durch Mischung einer gewissen Intensität farblosen Lichtes mit einer gewissen Intensität einer gesättigten (Spektral-)Farbe darstellen lässt, und die Summe dieser beiden Intensitäten die gesammte Intensität der Lichtempfindung ist. Ich habe in dieser Mischung die Intensität des farblosen (weissen) Lichtes die Intensität des beigemischten Weiss, und die Intensität jener homogenen Farbe die Farbenintensität der Lichtempfindung genannt. Durch den Farbenton und diese beiden Intensitäten ist dann die Lichtempfindung genau bestimmt.

Aber es ist noch eine (formelle) Bestimmung über die Abweichung zweier homogener Farben zu machen; ich sage zwei homogene, gleich intensive Farben weichen um denselben Winkel von einander ab, wie zwei andere gleich intensive, wenn die beiden ersten mit einander vermischt, dieselbe Intensität farblosen (weissen) Lichtes liefern, wie die beiden letzten. Durch diese Bestimmung ist, wenn man noch hinzunimmt, dass zwei gleiche intensive homogene Farben den mittleren Farbenton geben, nun auch die Vertheilung der Farben auf dem Farbenkreise genau bestimmt.

89 Nehmen wir zunächst wieder die beiden obigen † Complementärfarben Gelb und Indigo (deren Winkel, da sie entgegengesetzt sind, 180° beträgt). Nun wird es zum Beispiel in der Farbenreihe, die von

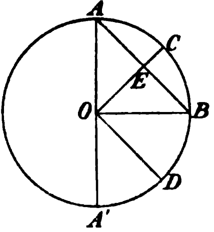
Gelb durch Grün zu Indigo übergeht, eine homogene Farbe geben, die von dem Gelb unter demselben Winkel abweicht wie von dem complementären Indigo, also um den Winkel von 90^0, und die man daher die zu jener normale Farbe nennen kann. Wird Gelb etwa mit a, die complementäre also mit $-a$ bezeichnet, so kann die normale mit beiden gleich intensive mit $a\sqrt{-1} = ai$ bezeichnet werden, und man kann nun ähnliche Methoden wie die Ihrigen für die weiteren Folgerungen anwenden.

Namentlich kann man den Hauptsatz der Farbenmischung (meine Abh. S. 83 {hier S. 172f.}) ableiten, wonach, wenn man jede Farbenempfindung durch einen intensiven (schweren) Punkt αA darstellt, dessen Richtung vom Centrum C des Farbenkreises den Farbenton, dessen Intensität α die Gesammtintensität, dessen Entfernung (CA) vom Centrum mit α multiplicirt die Farbenintensität, und dessen Entfernung (AB) von der Peripherie mit α multiplicirt also die Intensität des beigemischten Weiss darstellt, vorausgesetzt, dass der Radius CB seiner Länge nach $= 1$ gesetzt wird, dann die Mischung zweier Lichtempfindungen durch die (barycentrische) Summe der intensiven Punkte, welche diese beiden Lichtempfindungen darstellen, dargestellt wird.



Hierbei ist vor allen Dingen zu merken, dass hier nicht etwa bloss ein Vergleich mit der Planimetrie gegeben wird, sondern man hat es überall nur mit der abstrakten Grundlage der Planimetrie zu thun, die hier in den Lichtempfindungen ebenso ursprünglich hervortritt wie in der Planimetrie selbst. Die aus der Planimetrie entnommenen Ausdrücke sind hier nur, weil sie allgemein bekannt sind, auf unsere Wissenschaft übertragen.

Die Ableitung dieses Satzes auf dem hier begonnenen Wege ist interessant, aber sehr weitläufig. Ich gebe ein Beispiel. Es sei A eine homogene Farbe mit der Intensität 1, A' die Complementärfarbe, B die gegen beide normale mit der Intensität 1; gesucht sei die Mischung. Ihr Farbenton wird von A und B gleich weit abweichen, also um den Winkel von 45^0, dieser sei C, ebenso sei D der Farbenton der Mischung von B und A', also der Winkel CD ein rechter. Nun sei für die Mischung von A † und B die Intensität des beigemischten Weiss y und die Farbenintensität x, das heisst



90

$$A + B = xC + yw,$$

wenn w das Weiss von der Intensität 1 bedeutet, und ebenso

$$A' + B = xD + yw,$$

wo übrigens $x + y = 2$, also

$$A + A' + 2B = x(C + D) + 2yw,$$

oder da $A + A' = 2w$ ist,

$$2B + 2w = x(C + D) + 2yw.$$

Nun ist aber C zu D normal und zwischen ihnen in der Mitte liegt B, also

$$C + D = xB + yw,$$

also

$$2B + 2w = x(xB + yw) + 2yw$$
$$= x^2B + (x + 2)yw.$$

Daraus folgt $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$, also $y = 2 - \sqrt{2}$. Nennt man E den Schneidepunkt von AB mit OC, so ist $OE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; dies mit der Gesammtintensität 2 multiplicirt, sollte, wenn der Hauptsatz gilt, die Farbenintensität x liefern, was stimmt; ebenso ist $EC = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also mit 2 multiplicirt $2EC = 2 - \sqrt{2} = y$.

Es ist der auf diesem Wege geführte Beweis viel weitläufiger und auch lange nicht so streng als der in meiner Abhandlung gegebene. Aber dieser muss bedeutende begriffliche Schwierigkeiten haben, da ihn auch Helmholtz nicht ganz verstanden hat.

Es ist dort von einer an sich beliebigen homogenen Farbe in einer beliebigen Farbenintensität, die $= 1$ gesetzt wird, ausgegangen (Gelb), dann die Complementärfarbe (Indigo) bestimmt und ihre Intensität, sofern sie mit jener farbloses Licht liefert, gleichfalls 1 gesetzt. Dann ist die homogene Farbe bestimmt, welche zu jenem Gelb gemischt, ebensoviel farbloses Licht liefert, wie mit jenem Indigo, das heisst die zu beiden normale homogene Farbe; ihre Intensität ist so bestimmt, dass sie mit ihrer Complementärfarbe ebenso viel Weiss liefert, wie die obigen Gelb und Indigo. Dies sei ein bestimmtes Grün. Dann sind hierdurch zwei genau definirte Einheiten (Gelb und Grün) gewonnen, welche zunächst benutzt werden, um die Farbenintensitäten ihrer Mischungen darzustellen.

Da der Begriff der Intensität verschiedener homogener Farben erst durch die Mischung festgestellt werden soll, so kann man, wenn der Kürze wegen jenes Gelb mit A, jenes Grün mit B, und das Weiss, dessen Intensität $= 1$ ist, mit O bezeichnet wird, für die Farbenintensität der Mischung αA (Gelb mit der Intensität α und wenn α negativ $= -\alpha'$ ist, Indigo mit der Intensität α') und βB, wo $\alpha : \beta$ 91 ein beliebiges Verhältniss haben, festsetzen, dass sie gleich † der Strecke $\alpha OA + \beta OB$, [das heisst $\alpha(A - O) + \beta(B - O)$] sein soll, und die

Richtung dieser Strecke (alles im Sinne der Ausdehnungslehre) den Farbenton darstellen soll. (Auch hätte man $OA = 1$ und $OB = i = \sqrt{-1}$ setzen können, ohne dadurch freilich etwas zu gewinnen.)

Hieraus folgt nun das oben aufgestellte Gesetz der Farbenmischung ganz wie in meiner Abhandlung vermittelst der auch von Helmholtz anerkannten Sätze aufs allerstrengste. Auch folgt nun aus diesem Hauptgesetze sogleich, dass, wenn man eine beliebige andere Farbe statt des Gelb zu Grunde legt, ganz dieselben Resultate hervorgehen, dass ferner jede homogene Farbe von der Intensität 1 mit ihrer complementären ebenso viel Weiss giebt, wie jede andere solche mit ihrer complementären, ferner dass es gleichgültig ist, welche Intensität man 1 setzt. Kurz, es ist hier alles in vollster Harmonie, und muss diese Theorie ebenso die Grundlage für die Theorie der Farbenempfindungen sein, wie die Addition für die Ausdehnungslehre.

Was nun die Multiplikation betrifft, so beruht die Multiplikation mit einer Zahl, das heisst die Vervielfachung, zunächst auf einem wiederholten Additionsprocess. Ist A irgend eine Empfindung, so sind A, $A + A = 2A$, $2A + A = 3A, \ldots$ Empfindungen, die qualitativ gleich sind, und sich intensiv wie $1 : 2 : 3, \ldots$ verhalten; setzt man nun irgend eine dieser Intensitäten 1, so erhält man die Intensitäten als Brüche, und setzt man A unendlich klein, so erhält man die Intensitäten in stetiger Form.

Diese Multiplikation wiederholt sich natürlich auf allen Empfindungsgebieten. Ihr tritt eine zweifache Division gegenüber, nämlich die Division durch eine Zahl, oder Theilung, die aber auch durch Multiplikation mit einem Bruch ersetzt werden kann, und zweitens die Division zweier qualitativ gleicher Empfindungen durcheinander, deren Resultat eine Zahl ist, welche das Verhältniss der Intensitäten darstellt.

Die Zahl ist eine Grösse nullter Stufe. Ausser ihr giebt es aber noch in Gebieten von höherer als erster Stufe andere Grössen nullter Stufe, welche ich in meiner Ausdehnungslehre 1862 {Ges. Werke I, 2} ausführlich behandelt habe, und welche besonders für die durch Strecken darstellbaren Farbenintensitäten von Interesse sind. Im Allgemeinen ist solche Grösse nullter Stufe dadurch bestimmt, dass festgesetzt wird, in welche andere Grösse jede Grösse des betrachteten Gebietes sich durch Multiplikation mit einer solchen Grösse nullter Stufe verwandelt. Da für sie wie für jede Multiplikation das Beziehungsgesetz (das distributive Princip) gilt, so ist für ein Gebiet n-ter Stufe nur festzusetzen, in welche Grössen sich die n Einheiten des † Gebietes durch jene Multiplikation verwandeln. 92

Für das Streckengebiet zweiter und dritter Stufe bilden die

Hamiltonschen Quaternionen einen besonderen Fall dieser Grössen nullter Stufe. Für die Farbenintensitäten, welche ein Streckengebiet zweiter Stufe bilden, sind die Hamiltonschen Quaternionen solche Grössen nullter Stufe, welche zwei Strecken (die nicht parallel sind), und also auch alle Strecken um gleiche Winkel ändern und ausserdem noch mit einer Zahl multipicirt sein können. So zum Beispiel drückt $a e^{i\alpha}$, wo a eine homogene Farbe, α einen Winkel darstellt, eine andere homogene Farbe von gleicher Intensität aus, die von jener um den Winkel α abweicht. Die Division mit $e^{i\alpha}$ gleich Multiplikation mit $e^{-i\alpha}$.

Aber auch die combinatorische (auf ein Gebiet bezügliche) Multiplikation tritt auf dem Gebiete der Lichtempfindungen (als einem Elementargebiete dritter Stufe) in qualitativer Beziehung sehr leicht und einfach hervor. Sind zum Beispiel a und b zwei Lichtempfindungen, so drückt das combinatorische Produkt $[ab]$ qualitativ das Gebiet der Geraden ab, das heisst die Gesammtheit aller Lichtempfindungen aus, welche sich aus a und b numerisch ableiten lassen (nämlich durch positive Zahlen für die zwischen a und b liegenden, durch entgegengesetzte für die ausserhalb liegenden, und wenn sie ausserhalb des Farbenkreises zu liegen kommen, so hat man ideelle Lichtgebilde, denen keine reelle Empfindung entspricht); das heisst, wenn auch c und d zwei Lichtempfindungen sind, so ist $[ab]$ qualitativ gleich $[cd]$, in Formeln $[ab] \equiv [cd]$, dann und nur dann, wenn die beiden Gebiete zusammenfallen, oder wenn beide Produkte null sind. Aber $[ab]$ ist nur null, wenn $a \equiv b$ (qualitativ gleich b) ist.

Zweitens wenn $[ab]$ und $[cd]$ qualitativ verschieden (und keins derselben null ist), so drückt das Produkt $[ab \,.\, cd]$ qualitativ die Lichtempfindung (reelle oder ideelle) aus, welche beiden Gebieten gemeinsam ist, das heisst, welche sich sowohl aus a und b als auch aus c und d numerisch ableiten lässt; giebt es aber keine beiden Gebieten gemeinsame reelle oder ideelle Empfindung, so heissen die Gebiete parallel und das Produkt $[ab \,.\, cd]$ stellt dann qualitativ eine Strecke, dass heisst die Differenz zweier gleich intensiver Lichtempfindungen dar [Ausdehnungslehre 1862, Nr. 289 u. 290 {Ges. Werke I, 2, S. 186}].

Es war bisher der Werth der Produkte $[ab]$ und $[ab \,.\, cd]$ nur qualitativ betrachtet; will man auch ihren quantitativen Werth haben, so muss man auf eine neue Empfindung, die des Kontrastes eingehen, 93 welche schon aus dem Bereich der bisher betrachteten † einfachen reinen Empfindungen in das der combinirten hinüberschweift. Doch sind diese noch eher einer rein wissenschaftlichen Betrachtung fähig, als zum Beispiel die scheinbare Aenderung der Farbenqualität bei veränderter Intensität, wozu es noch an jeder sicheren wissenschaftlichen

Basis fehlt, und Gewöhnung, Ermüdung nebst den noch nicht hinreichend ermittelten objektiven Vorgängen im Innern des Auges von grossem Einflusse sind.

Will man nun das Produkt $[ab]$ als Kontrast der Lichtempfindungen a und b auffassen, so muss man den Begriff des Kontrastes einschränken und dem Begriffe jenes Produktes adäquat gestalten. Da das Produkt $[ab]$ null ist, wenn a und b qualitativ gleich sind, so ist der Gegensatz von hell und dunkel ganz aus dem Begriffsbereiche dieses Kontrastes zu verbannen, und für diesen Begriff eine verschiedene Qualität von a und b als nothwendige Bedingung festzuhalten. Sind a und b zwei Lichtempfindungen von gleicher Intensität 1, so stellt $[ab]$ den Konstrast $b - a$ dar auf dem Gebiete ab, in der Art, dass wenn a, b, c, d von gleicher Intensität sind $[ab] = [cd]$ dann und nur dann ist, wenn $[ab] \equiv [cd]$ (siehe oben) und ausserdem $a - b = c - d$ ist. Wachsen die Faktoren a und b ihrer Intensität nach und zwar a im Verhältnis $1 : x$ und b im Verhältniss $1 : y$, so wächst $[ab]$ im Verhältnisse $1 : xy$.

Ob aber der so aufgefasste Kontrast für das Gebiet der Empfindung eine wesentliche Bedeutung habe, ist mir sehr zweifelhaft. Hauptsache scheint hier der qualitative Kontrast von gleich intensiven Empfindungen.

VII. Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute.

Von

Hermann Grassmann.

Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, Bd. I, Heft 4, S. 606—629, geschlossen 3. August 1877.

606 Seit dem Jahre 1832, wo in Poggendorffs Annalen XXIV, p. 397 die bahnbrechende Arbeit von Robert Willis, „Ueber Vokaltöne und Zungenpfeifen" erschien, bin ich unausgesetzt bemüht gewesen, die Theorie der Vokallaute und der Sprachlaute überhaupt auszubilden und fest zu begründen.

Unmittelbar trat mir aus jener Arbeit der Mangel entgegen, dass Willis nur eine Reihe von Vokalen, nämlich *u*, *o*, *a*, *e*, *i* aufgefunden haben wollte, während doch die Vokale ebenso wie die Farben nur durch Vertheilung auf einer Fläche vollständig dargestellt werden können. Und bei der Wiederholung der Versuche ergab sich, dass der mittlere jener Vokaltöne von dem Charakter des *a* sehr weit verschieden war, und es darauf ankam, diesen Charakter festzustellen. Aus den Versuchen von Willis folgte, dass das den Vokal bestimmende ein höherer, mit dem Grundtone zugleich leise erklingender Ton sei, der mit jenem verschmelzend eben den Eindruck des Vokales hervorrief. Diese höheren Töne mussten sich also auch bei dem Aussprechen eines Vokales bei gehöriger Achtsamkeit vernehmen lassen. Es gelang dies so vollständig, dass ich auf diese Beobachtungen eine vollständige Theorie der Vokaltöne gründen konnte, welche allen billigen Anforderungen, die man an eine solche Theorie stellen kann, genügte.

Die Grundzüge dieser Theorie habe ich im Jahre 1854 im Programme des Stettiner Gymnasiums am Schlusse eines hauptsächlich für meine Schüler bestimmten Leitfadens der Akustik veröffentlicht. Es heisst darin (p. 14 {hier S. 188}) wörtlich: „Die Stimmbänder setzen zugleich die in der Mundhöhle befindliche Luft in Schwingungen; es

entstehen dadurch leise Nebentöne, welche je nach der Form, die man der Mundhöhle giebt, verschieden ausfallen, und welche der Reihe der harmonischen † Töne angehören, die den Ton der Stimmbänder zum 607 Grundton hat. Auf diese Weise entstehen die Vokale. Ein aufmerksames Ohr hört leicht beim Uebergange von *u* durch *ü* zu *i* eine Reihe leiser harmonischer Nebentöne, welche vom zweigestrichenen *c* bis zum fünfgestrichenen *c* fortschreiten können, und welche man bei denselben Mundstellungen auch für sich hervorbringen kann. Beim Vokale *a* klingt eine ganze Reihe der harmonischen Nebentöne mit, welche das Ohr in der Regel noch bis zur vierten Oktave vom Grundtone aus wahrnehmen kann, so dass also bei dem *a* ein voller Akkord von Nebentönen mitklingt. Hierdurch ist zugleich der Uebergang von *a* durch *o* zu *u*, sowie der von *a* durch *e* zu *i*, oder durch *ö* zu *ü* erklärt."

Diese Stelle in meinem Programm, in welcher unter der Reihe der harmonischen Nebentöne die jetzt in der Regel als Obertöne oder Partialtöne bezeichneten Töne verstanden sind, ist, obwohl sie eine vollständige Theorie der Vokaltöne, an der es bis jetzt noch fehlte, in sich schliesst, gänzlich unbeachtet geblieben.

Fünf Jahre später trat Hr. Helmholtz (Gelehrte Anzeigen d. k. bayr. Akad. der Wiss. 18. Juni 1859) mit einer Reihe wichtiger Versuche über Vokaltöne hervor, in denen er theils gegebene Vokaltöne in ihre einfachen Elemente aufzulösen versuchte, theils einfache Töne zusammensetzte, um aus ihnen Vokale zu bilden. Doch waren die Versuche nicht zahlreich und schlagend genug, um daraus auch nur annähernd eine Theorie der Vokaltöne ableiten zu können. Diese Versuche hat er dann in seinem berühmten Werke „Die Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1863" zum Theil ergänzt, ohne jedoch auch hieraus eine wirkliche Theorie der Vokaltöne ableiten zu können.

Als Resultat seiner Beobachtungen giebt Helmholtz an, dass in der Reihe der Vokale *u, o, a* nur je ein charakteristischer, das heisst stärker als alle übrigen † hervortretender Partialton sich vernehmen 608 lasse, der von *f* bis b_2 (zweigestrichenes *b*) oder bei hellerer Aussprache des *a* bis d_3 aufsteige. Bei den übrigen Vokalen treten nach ihm zwei charakteristische Töne hervor, welche beim *i* das grösste Intervall (von *f* bis d_4) von beinahe vier Oktaven mit einander bilden.

Der Uebergang von einem Vokale der Reihe *u, o, a* nach *i* hin muss also nach ihm in der Art stattfinden, dass der eine charakteristische Ton jener Reihe sich in zwei solche Töne spaltet, deren Divergenz immer grösser wird, je mehr sich bei diesem Uebergange der

Vokal dem *i* nähert. Aber in welcher Weise diese Spaltung stattfindet und sich bei verschiedenen Grundtönen gestaltet, ist aus seinen Beobachtungen weder zu schliessen noch auch zu errathen, und es bleibt daher die Theorie lückenhaft.

Aber noch mehr, die ganze Grundlage, auf welcher dieser Bau der Vokaltöne von Helmholtz aufgeführt wird, ist fehlerhaft und tritt mit anderen Behauptungen desselben in Widerspruch. So zum Beispiel sagt Helmholtz p. 165 seiner Lehre von den Tonempfindungen, dass bei den Klängen des menschlichen Kehlkopfes wohl die Obertöne ihrer Stärke nach mit steigender Höhe kontinuirlich abnehmen würden, wenn wir sie ohne Resonanz der Mundhöhle beobachten könnten; und fügt hinzu, dass die Obertöne dieser Annahme ziemlich gut bei denjenigen Vokalen entsprechen, welche mit trichterförmiger, weit geöffneter Mundhöhle gesprochen werden, nämlich beim scharfen *A* oder *Ä*. Dies muss namentlich für das *A* gelten, da beim *Ä* schon eine Verengerung der Mundhöhlung eintritt. Ja, wir können sagen, dass mit dieser freien Entfaltung der durch die Schwingungen der Stimmbänder erzeugten Obertöne das *A* seinem Wesen nach charakterisirt ist.

Ebenso irrig wie die obige Auffassung des Vokales *a* ist die Ansicht, dass zur Erzeugung des *ü* oder *i* ausser dem höheren charakteristischen Oberton noch ein zweiter tieferer erforderlich sei. Im Gegentheile klingen *ü* und *i* um so schöner und reiner, je mehr dieser tiefere 609 Ton schwindet, welcher dem sausenden Geräusche, † welches sich leicht den stark gesungenen Tönen beimischt und dieselben rauh und unschön macht, seinen Ursprung verdankt.

Es würden sich alle solche Differenzen in der Beurtheilung von Klängen und Geräuschen auf's leichteste ausgleichen lassen, wenn wir für die Zerlegung derselben in ihre einfachen Töne (mit pendelartigen Schwingungen) einen so zuverlässigen Apparat besässen, wie uns das Prisma oder das Interferenzgitter für die Zerlegung der Gesichtseindrücke liefert. Denn auch die Resonatoren leisten dies bis jetzt nur in höchst unvollkommener und, wie ich unten zeigen werde, wenig zuverlässiger Weise. Dagegen zeigt das menschliche Ohr eine ausserordentliche Fähigkeit, diese einfachen Töne zu empfinden, und bei einiger, richtig geleiteter Uebung auch deutlich von einander zu unterscheiden. Ja es übertrifft in dieser Beziehung, wenn nicht ein zu grosses Gewirr von Tönen aufzulösen ist, an Zuverlässigkeit bis jetzt alle künstlichen Hülfsapparate, und ich gründe daher meine Theorie vorzugsweise auf die unmittelbare Wahrnehmung durch das Ohr. Diese Wahrnehmungen sind aber keineswegs bloss subjektive, sondern lassen sich ohne Hülfsapparate einer ganzen Zuhörerschaft objektiv darstellen.

Hierbei darf ich jedoch eine Schwierigkeit nicht unerwähnt lassen. Wir Deutsche sind gewohnt, die gesungenen und gesprochenen Vokale mit einem hauchenden Geräusche zu begleiten, welches dadurch entsteht, dass wir durch die Stimmritze mehr Luft hindurchgehen lassen, als zu den stärkeren oder schwächeren Schwingungen der Stimmbänder erforderlich ist. Dadurch bekommt der Vokal etwas rauhes, sausendes, was den reinen Eindruck desselben stört und Gesang und Rede besonders in einiger Entfernung undeutlich macht. Es ist unter uns Deutschen selten jemand, der diesen Fehler nicht von vornherein an sich trüge; und die Gesanglehrer haben zur Beseitigung desselben meist eine mühsame und andauernde Thätigkeit nöthig. Es ist dies sausende Geräusch in gewisser Weise der Friction eines Maschinenwerkes zu vergleichen, welche die Kraft der † Maschine hemmt und zugleich ihre 610 Theile schneller aufreibt. Am meisten ist man bei Ueberanstrengung der Stimme, oder in affektvoller Rede zu solchem störenden Hauchen oder Blasen geneigt, kann sich aber auch in ruhigem Gesange oder feierlicher Rede schwer davon frei halten, wenn man nicht sich die Aufgabe gestellt hat, die Stimme davon zu reinigen.

Ich beschränke mich in der folgenden Darstellung streng auf die akustische Seite, und verweise in Bezug auf die physiologische Seite der Sprachlaute auf das treffliche Buch von E. Sievers „Grundzüge der Lautphysiologie, Leipzig 1876“, welches durchweg auf eigenen Beobachtungen beruht, aber auch die Beobachtungen anderer in gebührender Weise berücksichtigt und der Prüfung unterzieht.

§ 1. Die Vokale der Reihe *u*, *ü*, *i*.

Unter allen Vokalen sind die der Reihe *u*, *ü*, *i* am leichtesten akustisch festzustellen. Sie sind zugleich in ausgezeichnetem Maasse geeignet, das Ohr für das Wahrnehmen der bei diesen Vokalen mitklingenden Obertöne zu üben. Und es ist daher anzurathen, dass man nicht eher zur Untersuchung anderer Vokale übergeht, als bis man mit grösster Leichtigkeit die Obertöne dieser Vokalreihe wahrzunehmen gelernt hat.

Schon die einfachen Töne, wie sie durch Stimmgabeln, welche vor gleichgestimmten bauchigen Gläsern schwingen, oder auch durch blosses Anblasen solcher bauchigen Gläser hervorgebracht werden, zeigen aufs entschiedenste den Charakter dieser Reihe, nämlich die tieferen Töne bis etwa zu c_3 (dem dreigestrichen c) hinauf den Charakter eines in der Tiefe dumpfen, dann immer heller werdenden, zuletzt dem *ü* sich nähernden *u*, von c_3 bis etwa zu e_4 den Charakter des *ü*, von da ab bis zu beliebiger Höhe den des *i*. Denselben Charakter zeigen höchst

deutlich die Töne, welche man durch Pfeifen mit dem Munde hervorbringen kann, und welche bei geschickten Pfeifern von a_1 bis a_4 gehen 611 und nach der Reihe den Charakter des *u*, *ü* und erst in höchster Höhe den des *i* zeigen.

Höher hinauf gelingt es selten mehr, vollkommene Pfeiftöne hervorzubringen; es entstehen dort Geräusche, die sich aber um sehr hohe, leicht erkennbare Töne bis c_5 und höher hinauf gruppiren und den Charakter des *i* geben. Flüstert man die Vokale dieser Reihe *u*, *ü*, *i*, so entstehen Geräusche, die den entsprechenden Pfeiftönen sehr nahe liegen. Es besteht jeder dieser geflüsterten Vokale aus einer Reihe sehr nahe aneinanderliegender unharmonischer Töne, deren mittlere Tonhöhe sich ziemlich genau angeben lässt und jenem Pfeiftone entspricht. Oft geht bei energischem Flüstern dieser Vokalreihe unwillkürlich das Geräusch in den entsprechenden Pfeifton über.

Hält man genau die Mundstellung fest, bei welcher beim Hindurchblasen der Luft ein bestimmter Pfeifton, zum Beispiel c_1 (eingestrichen *c*) entstehen würde, und hält, statt die Luft hindurchzublasen, eine mit jenem Pfeiftone gleich hohe Stimmgabel dicht vor die Mundöffnung, so erklingt jener Ton sehr stark und deutlich, ganz in derselben Weise, als wenn man die Gabel vor die Oeffnung einer gleichgestimmten, bauchigen Flasche hält.

Ganz der entsprechende Vorgang findet nun aber bei der Vokalbildung dieser Reihe statt. Denn die Stimmbänder erzeugen bei der Tonbildung ähnlich den Saiten eines Klaviers oder der Zunge einer Pfeife ausser dem am stärksten erklingenden Grundtone eine Reihe von Obertönen, deren Schwingungszahlen Mehrfache von der Schwingungszahl des Grundtones sind. Man nennt diese sämmtlichen Töne, den Grundton eingeschlossen, die Partialtöne des zusammengesetzten Klanges. Diese Partialtöne sind zum Beispiel für den Grundton *c* (klein *c*) folgende:

c	c_1	g_1	c_2	e_2	g_2	b_2	c_3	d_3	e_3	x	g_3	x	b_3	h_3	c_4	cis_4	d_4	dis_4	e_4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
			u				|							*ü*					|

f_4	x	x	g_4	gis_4	...
21	22	23	24	25	...
			i		

612 wo die darunter gesetzten Zahlen angeben, wie viel Schwingungen diese Töne machen, während der Grundton eine Schwingung vollendet, und wo die Töne, die hier mit x bezeichnet sind, keinen Tönen unserer Tonleiter entsprechen.

Singt man nun den Ton klein *c*, also den Ton, welcher beim Bass-

schlüssel in dem zweiten Zwischenraum geschrieben wird, und macht dazu die Mundstellung, mit welcher man den Ton c_1 pfeifen würde, so wird von den Obertönen, die die Stimmbänder ausser dem Grundtone erklingen lassen, der Ton c_1 bedeutend verstärkt, während die übrigen Obertöne fast ganz erlöschen. Der vokalische Klang, den man dabei vernimmt, ist ganz der eines schönen dunkeln *u*. Ganz das entsprechende geschieht, wenn man die Mundstellung so einrichtet, wie sie bei dem Pfeifen eines der folgenden Partialtöne stattfinden würde, wobei der Vokalklang allmählich die verschiedenen Abstufungen des *u*, *ü*, *i* durchläuft. Es ist sehr zweckmässig und für die Ausbildung der Fähigkeit, die bei den Vokalklängen hervortretenden Partialtöne als solche zu vernehmen, durchaus nothwendig, diese Versuche vollständig und nöthigenfalls wiederholt vorzunehmen.

Man sieht aus der vorigen Tabelle, dass man auf diese Weise sieben Abstufungen des *u*, zwölf Abstufungen des *ü* und von da ab Abstufungen des *i* in fast unbegrenzter Anzahl erhält, von denen aber in der Tabelle nur fünf vermerkt sind, und die sich auch nur wenig von einander unterscheiden.

Jetzt lasse man umgekehrt auf demselben Grundton *c* in möglichst allmählichem Uebergange die Reihe der verschiedenen Abstufungen des *u* und *ü* erklingen, so wird man mit grösster Deutlichkeit die Reihe der Partialtöne, wenigstens bis zum 16. Partialtone hin wahrnehmen, und nur die unharmonischen beiden oben mit x bezeichneten Partialtöne wird man schwerer vernehmen. Ebenso wird man beim umgekehrten Vokalübergange die Partialtöne in umgekehrter Ordnung vernehmen. Man wird so die volle Ueberzeugung gewinnen, dass nur diese Partialtöne es sind, welche den Charakter der Vokale dieser ganzen Reihe † bedingen. 613

Nimmt man beim Singen des Grundtons *c* eine Mundstellung an, bei welcher ein Pfeifton erklingen würde, der nicht zu den Obertönen von *c* gehört, so vernimmt man, obwohl schwächer, die beiden benachbarten Partialtöne. Lässt man zum Beispiel die Mundstellung allmählich von derjenigen, in welcher der Pfeifton c_1 erklingen würde, in die zu dem Pfeifton g_1 gehörige Mundstellung übergehen, so erklingen bei dem Grundton *c* diese beiden Partialtöne und zwar zunächst g_1 sehr leise, dann immer stärker, während die Tonstärke von c_1 allmählich abnimmt und zuletzt fast Null wird. In der mittleren Mundstellung erklingen beide Partialtöne c_1 und g_1 gleich stark, aber beide sehr viel leiser, als wenn die Mundstellung auf den einen oder anderen Partialton eingerichtet ist. Dabei verändert sich der Charakter des Vokales ein klein wenig, indem er sich, obwohl fast unmerklich, dem

eines äusserst weichen *o* nähert. Ich nenne nämlich einen Vokalklang einen weichen, wenn die mitklingenden Partialtöne sehr leise sind. Ebenso nähern sich die Abstufungen des *ü* bei einer Mundstellung, die einem mittleren, nicht zu den Partialtönen gehörigen Pfeiftone entspricht, einem sehr weichen *ö*, obwohl noch unmerklicher als dort die *u*-Klänge sich dem *o* näherten.

Nimmt man nun statt des *c* einen anderen Grundton, so verändert sich zwar die Reihe der Partialtöne, aber der Charakter der Vokale der Reihe *u*, *ü*, *i* bleibt an die absolute Höhe der Partialtöne gebunden in der Art, dass auch hier die einzelnen Partialtöne bis etwa zu c_3 hinauf den Charakter des *u* liefern, von da bis etwa zu e_4 den des *ü*, von da ab den des *i*, wobei es gleichgültig ist, der wievielste Partialton vom Grundtone aus der Vokal-bestimmende Ton ist.

Nimmt man zum Beispiel c_1 statt *c* als Grundton, so erhöhen sich alle Partialtöne um eine Oktave, also wird dann der vierte Partialton schon c_3 (statt c_2 der obigen Tabelle) und wird schon hier die Grenze des *u* erreicht, und der zehnte Partialton wird e_4 (statt e_3 der Tabelle), 614 also wird schon hier die Grenze des *ü* erreicht, † und die folgenden Partialtöne geben schon den Charakter des *i*.

Es ist dies namentlich hervorzuheben im Gegensatze gegen die Darstellung von Quanten*), welcher den in Bezug auf die hier betrachtete Vokalreihe *u*, *ü*, *i* ganz irrigen Satz aufstellt: „Je tiefer der Grundton, desto tiefer, je höher der Grundton, desto höher ist der charakteristische Ton.“

§ 2. Der Vokal *a*.

Beim Aussprechen oder Singen des Vokals *a* wird die Mundhöhle weit geöffnet und zwar so, dass weder die Zunge noch die Lippen den Raum der Höhlung verengen. Es wird dadurch bewirkt, dass die durch die Schwingungen der Stimmbänder hervorgebrachten Partialtöne sich ungehemmt entfalten können (vgl. Helmholtz, Tonempfindungen p. 165). Schon hiernach muss man vermuthen, dass der eigenthümliche Charakter des *a* die möglichst gleichförmige Ausbildung der harmonischen Obertöne ist.

Eine nähere Prüfung, die besonders durch den allmählichen Uebergang des *u* durch *o*, a_0 zu *a* und den umgekehrten bewirkt werden kann, ergiebt, dass beim Vokale *a* die Obertöne bis zum achten oder bei hellerer Aussprache auch wohl bis zum zehnten Partialton hin in fast gleicher Stärke ertönen und somit ein voller Accord, zum Beispiel

*) Poggendorffs Annalen CLIV, p. 291.

über klein *c* der Accord $c\ c_1\ g_1\ c_2\ e_2\ g_2\ b_2\ c_3\ (d_3\ e_3)$ erklingt. Lässt man also über dem Grundtone *c* die Reihe der Vokale von *u* durch *o* und a_0 zu *a* ertönen, so treten zu dem Obertone c_1 nach und nach die Obertöne g_1, c_2 u. s. w. bis c_3 (oder e_3) hinzu, ohne dass die tieferen Obertöne verschwinden, während bei dem umgekehrten Uebergange nach und nach die höheren Töne des Accordes erlöschen, und zuletzt nur der Oberton c_1 übrig bleibt.

Es besitzt also der Vokal *a* keinen charakteristischen, die anderen überwiegenden Oberton, sondern für ihn ist die ganze Reihe der Obertöne bis zur dritten Oktave des Grundtons charakteristisch, und in diesem Sinne gilt für † diesen Vokal das von Quanten (siehe vorhin) 615 angeführte, für die Uebergangsreihe *u*, *ü*, *i* irrige Gesetz, dass, je höher der Grundton ist, desto höher auch die mitklingenden Obertöne werden.

Aber bei keinem Vokale tritt mehr die subjektive Eigenthümlichkeit des Sängers, oder seine ungleiche Disposition für reinen Gesang, oder die ungleiche Schönheit des Klanges bei verschiedener Höhe des von ihm gesungenen Tones hervor als bei dem Vokale *a*. Denn jeder Schleimansatz an den Stimmbändern, jeder sich nebenbei drängende Hauch stört die gleichmässige Entwickelung der Obertöne, und in verschiedener Tonhöhe ist die Fähigkeit der mehr oder weniger gespannten Stimmbänder, die harmonischen Obertöne rein und voll ertönen zu lassen, eine ungleiche und der Sänger muss hier vielfach nachhelfen. Für das vollkommenste und wohltönendste *a* halte ich das, bei welchem die Obertöne bis zum achten Partialtone hin in gleicher Stärke, aber gegen den Grundton doch nur leise erklingen, und ich werde dieses *a* bei den folgenden Untersuchungen zu Grunde legen.

§ 3. Die übrigen Vokale, Ableitung derselben aus drei Grundvokalen.

Alle übrigen Vokale, ausser den in § 1 und 2 behandelten, lassen sich aus diesen durch Uebergänge ableiten, also durch den Uebergang eines Vokales der Reihe *u*, *ü*, *i* in *a* oder umgekehrt. Um die Stelle zu fixiren, die ein Vokal bei solchem Uebergange einnimmt, wird man sich der Zahlenverhältnisse bedienen müssen. Zu dem Ende suche ich zuerst den Uebergang von einfachen Tönen von ungleicher Höhe durch ein Zahlenverhältniss darzustellen.

An den einfachen Tönen kann man nur ihre Tonhöhe und ihre Tonstärke unterscheiden.

Wenn zwei einfache Töne *l* und *m* gleiche Tonhöhe haben, aber beliebige Tonstärken, so nenne ich nach meiner Ausdehnungslehre von

1862, Nr. 2 {ges. Werke I, 2, S. 11}, beide einander kongruent und bezeichne dies durch $l \equiv m$. Wenn nun irgend eine Tonstärke als 616 Einheit zu † Grunde gelegt wird, und von zwei kongruenten Tönen l und m der erstere die Tonstärke 1, der zweite die durch eine Zahl ausgedrückte Tonstärke x hat, so setze ich $m = xl$, und also $xl \equiv l$.

Um die Tonhöhe zu fixiren, lege ich als Einheit der Intervalle etwa den halben Ton gleichschwebender Temperatur zu Grunde und bezeichne ein Intervall durch die Zahl i, wenn es i solcher halber Töue enthält. Danach ist also zum Beispiel die Oktave $= 12$, die Quinte gleichschwebender Temperatur $= 7$ u. s. w.

Jetzt seien l und m zwei Töne von ungleicher Höhe, aber gleicher Tonstärke, die ich $= 1$ setze. Es sei l der tiefere Ton und das Intervall zwischen beiden i, so setze ich $m = l + i$. Hieraus lässt sich alles ableiten. Es seien l, m, n drei Töne von der Tonstärke 1 und $n \equiv xl + ym$, so erhält man, wenn $m = l + i$ ist,

$$n \equiv xl + y(l + i) = (x + y)l + yi \equiv l + \frac{y}{x + y} i,$$

das heisst das Intervall von l zu n ist $\frac{y}{x+y} i$. Man sieht, dass die Beziehung genau dieselbe ist, wie die zwischen zwei Punkten l, m einer geraden Linie und ihrem Schwerpunkte n, wenn x und y die Gewichte der Punkte l und m sind.

Nach diesem Princip kann man nun auch die über demselben Grundtone gesungenen Vokale zusammensetzen, zuerst die Vokale der Reihe u, $ü$, i. Es sei zum Beispiel irgendeine Abstufung der u-Vokale, etwa die, bei welcher c_1 der charakteristische Ton ist, mit U, und irgend eine Abstufung der i-Vokale, etwa die, bei welcher c_5 der charakteristische Ton ist, mit I bezeichnet, so ist das Intervall zwischen beiden $4 . 12 = 48$. Dann wird man denjenigen Vokal $\equiv xU + yI$ setzen können, bei welchem der charakteristische Ton $\equiv xc_1 + yc_5$ ist, zum Beispiel wird derjenige Vokal $\equiv U + I$ gesetzt werden können, bei welchem der charakteristische Ton $\equiv c_1 + c_5$, das heisst welcher um das Intervall $\frac{y}{x+y}$ 48, also hier um 24 halbe Töne höher liegt als c_1, das heisst den Vokal mit dem charakteristischen Tone c_3. Ebenso wird derjenige Vokal $\equiv U + 2I$ gesetzt werden können, welcher um 617 das Intervall $\frac{2}{3}$ 48, also um 32 † halbe Töne höher liegt als c_1, das heisst der Ton gis_3. Kommt dieser nicht unter den Partialtönen des gesungenen Grundtones vor, so haben wir schon in § 1 gesehen, wie er durch die zwei benachbarten Partialtöne ersetzt wird.

Ganz nach demselben Princip werden wir nun auch, wenn A denjenigen Vokal a bezeichnet, bei welchem die Obertöne bis zum achten

Partialtone hin in gleicher Stärke erklingen, denjenigen Vokal, der $\equiv xU + yI + zA$ ist, genau bestimmen können. Es sei zuerst P der Vokal $\equiv xU + yI$, oder auf die Tonstärke 1 gebracht

$$P = \frac{xU + yI}{x + y}.$$

Nun sei A_1 irgendeiner der in A enthaltenen Partialtöne, so wird

$$xU + yI + zA_1 = (x + y)P + zA_1,$$

der hierdurch erhaltene Ton liegt also nach dem obigen um $\frac{z}{x+y+z} i_1$ höher als P, wenn i_1 das Intervall von P zu A_1 ist. Der Vokal $xU + yI + zA$ enthält also die Obertöne, die von P um die Intervalle

$$\frac{z}{x+y+z} i_1, \quad \frac{z}{x+y+z} i_2, \quad \text{u. s. w.}$$

abweichen, vorausgesetzt, dass $i_1, i_2, \ldots$ die Intervalle zwischen P und den in A enthaltenen Obertönen $A_1, A_2, \ldots$ sind.

Ich wähle bestimmte Beispiele. Ich definire den Vokal O als $U + A$, das heisst, die Obertöne von O liegen von dem charakteristischen Tone des U, also von c_1 halb so weit entfernt als die Obertöne von A. Ist zum Beispiel c der Grundton, so enthält A die Obertöne von c_1 bis c_3, also O die Obertöne von c_1 bis c_2, also c_1, g_1, c_2, wo g_1 statt der nicht zu den Partialtönen von c gehörigen Töne eintritt, welche nach obiger Gleichung hervortreten müssten. Aehnlich kann man den Vokal $Ö$ als in der Mitte zwischen $Ü$ und A liegend annehmen, und E als in der Mitte zwischen I und A liegend. Man kann hiernach, wenn man U, I, A oder irgend drei andere Vokale, von denen einer nicht als zwischen den anderen beiden liegend erscheint, durch drei Punkte einer Ebene darstellt, jeden anderen Vokal durch einen genau bestimmten Punkt dieser Ebene darstellen.

Ich habe die Obertöne der Einfachheit wegen als † gleich stark 618 angenommen; diese Annahme ist an sich nicht nothwendig, da die obige Darstellung auch die Principien enthält, nach denen man auch in demjenigen Falle verfahren muss, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist. Genauere Versuche müssen erst über die relative Stärke der Obertöne entscheiden, ebenso über die Spaltung der Obertöne, wenn sie nicht zu den Partialtönen des gesungenen Grundtones gehören. Die Theorie ist also als solche noch nicht vollkommen abgeschlossen.

§ 4. Geschärfte Vokale und Diphthongen im Deutschen.

Wir unterscheiden im Deutschen unter den langen Vokalen nur a, e, i, o, u, ä, ö, ü, von denen aber ä mehr etymologisch als phone-

tisch von dem e, namentlich in solchen Worten, wie geben und nehmen, verschieden ist.

Aber anders verhält es sich mit den kurzen Vokalen. Wenn nämlich auf den Vokal zwei Konsonanten, namentlich zwei gleiche Konsonanten (ll, mm u. s. w.) folgen, so ändern alle Vokale ausser a ihren Charakter, indem sie nämlich dem a um eine Stufe näher rücken. Wir nennen diese Vokale *geschärfte*. Die Vokale in „stumm, dünn, still", haben den Charakter eines etwas zugespitzten o, ö, e; ferner die Vokale in „voll, völlig, hell", haben durchaus nicht mehr den Charakter des o, ö, e, sondern den einer Mittelstufe zwischen diesen Vokalen und dem a, also den Charakter a_0, $ä_0$, *ä*, und zwar eines *ä*, wie wir es als langen Vokal gar nicht kennen, und wir müssen daher auch diese Vokale als Vokale der deutschen Sprache festhalten, was für die Erkenntniss der Diphthongen wesentlich ist.

Wir haben in der jetzigen deutschen Sprache nur drei Diphthongen, die ich mit *ai*, *au*, *aü* bezeichne, und von denen wir den ersten ai und ei, den letzten äu und eu schreiben, ohne irgend einen phonetischen Unterschied dadurch zu bezeichnen. Beim Gesange werden diese Diphthongen fast in ihrer ganzen Dauer als *a* gesungen, und erst ganz am Schlusse der Uebergang in den letzten Laut des Diphthongen be-619 wirkt, also von *a* durch † *ä*, *e* zu *i*, oder durch a_0, *o* zu *u*, oder durch $ä_0$, *ö* zu *ü*. Dagegen lassen wir beim Sprechen, wenigstens in Norddeutschland, das *a* fort und sprechen $au = a_0 - o - u$, $aü = ä_0 - ö - ü$, $ai = ä - e - i$.

§ 5. Halbvokale.

Die Halbvokale schliessen sich aufs engste an die Vokale an, ja können in dieselben übergehen. Bei ihnen tritt, wie bei den Vokalen, kein Geräusch hervor, sondern nur der Grundton mit seinen Obertönen, sodass man mit jedem derselben, ohne einen Vokal zu Hülfe zu nehmen, ebenso deutlich eine Melodie singen kann wie mit den Vokalen. Ihr wesentlicher Unterschied von den Vokalen besteht nur darin, dass der Grundton schwächer ist als dort, wogegen die Obertöne kräftig hervortreten. Es gehören dahin die Nasale *m*, *n*, *ng*, ferner *l* und *r* und endlich *j* und *v*, wenn sie vokalisch gesprochen werden. Ich will die letzteren, um sie von den unten zu behandelnden Rauschlauten *j* und *v* zu unterscheiden, nach dem Vorgange von Sievers (Lautphysiologie p. 89) mit *i̯*, *u̯* bezeichnen. Der Grundton aller dieser Halbvokale verschwindet nur beim Flüstern.

Bei den Nasalen wird der Stimmton durch die Nase gelenkt, während die Mundhöhle nur als Resonanzraum wirkt. Der Verschluss

des Mundes wird beim *m* durch die Lippen, beim *n* durch die Zungenspitze und bei *ng* (in singen, sengen, hangen, Zunge, Junge, Sprünge u. s. w.) durch den mittleren oder hinteren Theil der Zunge bewirkt.

Bei dem letzteren findet die grösste Mannichfaltigkeit statt, je nach dem Theile der Zunge, der den Abschluss bewirkt, und je nach der Gestalt, die man der Mundhöhle giebt. Wird der Abschluss durch den untersten Theil der Hinterzunge bewirkt, so werden, wenn man der Mundhöhle die bei a, a_0, o eintretenden Gestalten giebt, durch Resonanz der Mundhöhle die bei jener Vokalreihe a, a_0, o erklingenden Obertöne mit ausserordentlicher Deutlichkeit und Stärke hervorgebracht. Lässt man den Verschluss † nach und nach mehr nach vorne bis nahe 620 zur Zungenspitze vordringen, so wird der Grundton mehr gedämpft, aber auch die Obertöne werden etwas schwächer, es treten dabei je nach der Form der Mundhöhle die Obertöne der Reihen *ä* bis *e*, $ä_0$ bis *ö*, endlich, wenn der Verschluss durch die Zungenspitze bewirkt wird, die Obertöne des *i* hervor. Beim Verschluss durch die Lippen lassen sich die Obertöne des *u* und *ü* vernehmen.

Die nasalirten Vokale, wie sie in den slavischen und lettischen Sprachen und zum Theil im Französischen vorkommen, entstehen, wenn der Verschluss der Mundhöhle ein unvollkommener ist, so dass ein Theil des Stimmtones durch die Nase, ein anderer durch den Mund geht. Sie bilden den Uebergang zu den eigentlichen Vokalen.

Bei *l* und *r* wird der Grundton, so wie die tieferen Obertöne durch die vorgelegte Zunge gedämpft, indem alle Töne ihren Weg um die Zungenränder herum nehmen müssen. Namentlich wird beim *l* die Zungenspitze gegen den Gaumen gedrückt und die höheren Obertöne, so wie der gedämpfte Grundton nehmen ihren Weg zu beiden Seiten der Zunge. Der Klang wird je nach der Biegung und Stellung der Zunge und je nach der Form der Mundhöhle ein sehr verschiedener; es treten dabei die Obertöne des $ä_0$, *ä*, *ö*, *e* oft mit schmetternder Deutlichkeit hervor.

Das *r* unterscheidet sich vom *l* dadurch, dass statt des Andrückens der Zungenspitze an den Gaumen nur eine grosse Annäherung stattfindet, so dass ein Theil des Klanges auch über die Zungenspitze hinweg gelangen kann. So treten beim *r* dieselben, aber nicht so stark ausgeprägten Gegensätze wie beim *l* hervor. Doch macht sich der Charakter des *r* nur deutlich geltend bei dem Uebergange zum Vokal und daher, wenn es dauernd ertönen soll, beim erzitternden Schwingen der Zungenspitze, wobei ein fortdauernder Wechsel zwischen dem Klange jenes ersten *r* und dem entsprechenden Vokale stattfindet.

Das schnarrende *r*, welches durch Erzitterung der Hinterzunge

621 hervorgebracht wird und in neuerer Zeit unter den † Gebildeten Norddeutschlands sehr um sich gegriffen hat, wird von einem starken, die Deutlichkeit der Sprache beeinträchtigenden Geräusche begleitet und ist daher nicht mehr den Halbvokalen zuzuzählen und überhaupt als ein Fehler in der Aussprache zu bezeichnen. Beide *r* und *l* entwickeln sich durch stärkeres Hervorheben des Grundtones in manchen Sprachen, wie im Sanskrit, zu selbstständigen, das heisst Silben bildenden Vokalen.

Die Halbvokale *i̯* und *u̯* unterscheiden sich von *j* und *v* durch das Fehlen des Geräusches, von *i* und *u* durch die Schwäche des Grundtones. Das englische *w* stellt seiner Aussprache nach den Halbvokal *u̯*, und der Laut, der zum Beispiel im englischen *use* dem *u*-Vokale vorhergeht, den Halbvokal *i̯* getreu dar. Ebenso erscheint der Halbvokal *u̯* im Deutschen in der Verbindung *qu*. Akustisch möglich wäre auch der Halbvokal *ü̯*, der jedoch nirgends gebräuchlich zu sein scheint.

§ 6. Charakteristik der Geräuschlaute.

Alle Konsonanten ausser den Halbvokalen sind durch Geräusche charakterisirt. Das Geräusch unterscheidet sich von dem harmonischen Zusammenklingen der Töne durch die sehr grosse, oder auch unendliche Menge unharmonischer Töne, aus denen es zusammengesetzt ist.

Um die Geräusche, wie sie namentlich in den Sprachlauten hervortreten, einigermassen fixiren zu können, unterscheide ich erstens solche Geräusche, in denen sich einzelne von der übrigen Masse deutlich gesonderte Töne vernehmen lassen, und solche, in denen die Töne eine mehr stetige Reihe bilden. Die ersteren treten in den Zischlauten hervor, bei denen durch das Zerspringen der kleinen Bläschen der Mundfeuchtigkeit zwischen den Zähnen sehr hohe, deutlich vernehmbare Töne hervorgebracht werden, die aber weder unter sich, noch mit dem etwa vorhandenen Grundtone in Harmonie stehen, sondern deren Höhe vorzugsweise von der zufälligen Grösse der zerspringenden Bläschen abzuhängen scheint.

622 Ferner unterscheide ich † die Breite des Geräusches. Darunter verstehe ich das Intervall, innerhalb dessen die ungefähr gleich starken Töne, die das Geräusch bilden, liegen. Ich sage also zum Beispiel, ein Geräusch habe die Breite einer Oktave, wenn die (nahe gleich starken) Töne, die es bilden, sich innerhalb der Grenzen einer Oktave halten.

Unter mittlerer Höhe eines Geräusches verstehe ich das Mittel aller Töne, die das Geräusch bilden.

So werden sich die Geräusche durch ihre Breite und Höhe auch schon vermittelst des aufmerkenden Ohres wenigstens annäherungsweise unterscheiden lassen. Eine genaue Zergliederung eines Geräusches

würde freilich die Zerlegung desselben in seine einzelnen Töne und die Bestimmung der Stärke dieser Töne erfordern. Aber von der Lösung dieser Aufgabe sind wir bei dem jetzigen Stande unserer akustischen Hülfsmittel noch sehr weit entfernt; und es bleibt uns gegenwärtig kaum etwas übrig, als eine ungefähre Schätzung der Geräusche nach den oben angegebenen Kategorien.

In der Sprache können wir die Geräuschlaute theilen in dauernde (Dauerlaute) und momentane (Stosslaute); die ersteren wieder in hauchende und zischende, und sie alle wieder in harte und weiche.

Das Geräusch tritt am deutlichsten hervor bei den harten Dauerlauten. Es hängt seine Breite und Höhe bei den Hauchlauten hauptsächlich von der Stelle ab, an welcher die Verengung gebildet wird, durch welche der Hauch hindurchzudringen gezwungen ist, und von der damit in Verbindung stehenden Resonanz der Mundhöhle. Dadurch ist der Unterschied der Geräuschlaute nach den Sprachorganen bedingt.

Bei den Zischlauten tritt zu dieser Verengung noch die Verengung, die durch Aneinanderschliessen oder Annäherung der Zahnreihen oder durch Annäherung einer Zahnreihe an das Sprachorgan entsteht, hinzu, und es mischt sich jenem Hauchgeräusche zugleich das hierdurch bewirkte Zischgeräusch bei.

Bei den weichen Dauerlauten tritt ausserdem in der Regel, obwohl nicht gerade nothwendig, ein durch Schwingung der Stimmbänder erzeugter Grundton hinzu, der diese † Laute den Vokalen nähert und 623 es ermöglicht, auch mit ihnen eine, freilich von einem sausenden Geräusche begleitete Melodie mit voller Deutlichkeit vorzutragen.

Zu den dauernden Geräuschen gehören auch die geflüsterten Vokale und Halbvokale, von denen die ersteren, wie unten gezeigt wird, auch beim lauten Sprechen sich unter gewissen Umständen den Konsonanten beigesellen.

§ 7. Die Hauchlaute.

Ich bezeichne die harten Hauchlaute der Kürze wegen mit *ph, th, ch, kh* und die entsprechenden weichen mit *bh, dh, gh, h*. Sie ermangeln alle des zischenden Geräusches, das die im folgenden Paragraphen zu behandelnden Zischlaute auszeichnet.

Unter den harten Hauchen wird *ph* durch Annäherung der beiden Lippen aneinander hervorgebracht und unterscheidet sich dadurch von dem zischenden Laute *f*, bei dem die Unterlippe der oberen Zahnreihe genähert wird. Das entstehende Geräusch hat die mittlere Höhe etwa des c_2, also dem charakteristischen Tone des *u* entsprechend.

Das *th* hat ungefähr den Klang des englischen harten *th*, nur dass

das zischende Geräusch, das diesem oft beiwohnt, fehlt. Das Geräusch scheint hier ein zusammengesetztes zu sein; ich höre, wenn ich es richtig ausspreche, ein Geräusch von der mittleren Höhe des c_3, aber vermischt mit viel höheren Tönen, welche den höchsten Zischtönen nahe kommen.

Das *ch* entsteht durch Herandrängen des mittleren oder hinteren Theils der Zunge an den gegenüberstehenden Gaumen, das *kh* ebenso durch Herandrängen des untersten Theils der Hinterzunge an den gegenüberstehenden Theil der Kehle. Letzteres kann als ein verstärktes *h* aufgefasst werden und entspricht dem *ch* der Schweizer und dem *chet* der Hebräer. Es zeigt sich hier besonders deutlich, wie die Laute *ch* bis *kh* eine ganz stetige Reihe bilden, deren einzelne Laute sich akustisch sehr wesentlich unterscheiden. Man erkennt die mittlere Tonhöhe dieser Geräusche (des *ch* bis *kh*) so deutlich, dass 624 man sogar annähernd eine Melodie durch † diese Geräusche, wenn man die Aufmerksamkeit auf ihre mittlere Tonhöhe richtet, hörbar machen kann. Diese mittlere Tonhöhe erreicht bei dem *ch*, wie es in „riechen, siech“ ausgesprochen wird, die Höhe des c_4 und kann leicht bis zu g_4 gesteigert werden, und sinkt bei dem *ch* in „suchen, Tuch“ bis zu c_2 herunter. Geht man zu dem *ch*, wie wir es in „ach“ sprechen und zu dem *kh* der Schweizer über, so wird das Geräusch, indem sich seine mittlere Höhe vertieft, zugleich breiter, so dass es zuletzt die Breite des *a*, das heisst die Breite von zwei Oktaven annimmt.

Bei den weichen Hauchen, ausser bei *h*, kann zugleich ein Stimmlaut (bei dem die Stimmbänder schwingen) eintreten, im übrigen unterscheiden sie sich von den harten Hauchen nur dadurch, dass die Organe, welche die Verengung bewirken, nicht so nahe aneinandertreten, und der Hauch nicht so stark hindurchgetrieben wird. Die Geräusche werden dadurch viel schwächer und beim *h* wird es so geringe, dass, wenn man versucht, mit ihm einen Stimmton zu verbinden, sogleich ein Vokal entsteht.

Es versteht sich nach dem Obigen von selbst, dass *bh* durch Annäherung der beiden Lippen hervorgebracht wird und sich dadurch von dem *v* scheidet, welches durch Annäherung der Unterlippe an die obere Zahnreihe entsteht und den Zischlauten zugehört. Das *gh* ist der Laut, den wir im Deutschen mit *j* bezeichnen.

§ 8. Die Zischlaute.

Die harten Zischlaute sind *f*, *s*, *sch*, *ç*. Hier verstehe ich unter *s* das harte *s* (gewöhnlich *ſs* geschrieben) und unter *ç* den im Sanskrit üblichen Zischlaut, den man erhält, wenn man bei Sprechen des *ch* die

Zahnreihen aneinanderhält. Das *f* habe ich schon oben (§ 7) als Zischlaut charakterisirt.

Die weichen Zischlaute, welche jenen harten entsprechen, bezeichne ich mit *v*, *z*, *ẓ*, *ç̣*. Der erstere ist das deutsche *w*, der zweite das weiche *s*, wie wir es im Deutschen anlautend vor Vokalen sprechen, und das französische *z*; mit *ẓ* bezeichne ich den Laut des † französi- 625 schen *j* (in *je*, *jamais* u. s. w.). Der Laut *ç̣*, der die Erweichung des *ç* ist, ist jetzt kaum noch in einer Sprache nachweisbar. Doch hat Ascoli gezeigt, dass er im Sanskrit oder in der indogermanischen Ursprache einst vorhanden gewesen sein muss. Auch hier lassen sich dem *ẓ* durch verschiedene Stellung der Zunge verschiedene Modifikationen mittheilen, durch die man stetig zu dem vorherbeschriebenen Laute *ç̣* gelangen kann.

Mit den weichen Zischlauten lässt sich ebenso wie mit den weichen Hauchlauten ein Stimmton verbinden. Dieser fehlt bei den harten Zischlauten gänzlich; aber dagegen ist das Geräusch so stark, dass man *st*, *scht* als Interjektionen gebraucht, die weithin hörbar sind.

§ 9. Die momentanen Laute (Stosslaute).

Die Stosslaute entsprechen genau den Hauchlauten, indem an die Stelle der Verengung der vollkommene Verschluss tritt, und auch die Geräusche sind im wesentlichen dieselben, nur dass sie hier von äusserst kurzer Dauer, fast momentan sind, und sich daher der akustischen Beobachtung viel mehr entziehen. Das durch sie hervorgebrachte Geräusch tritt besonders ein, wenn der folgende Luftstrom oder Ton die bisherige Verschlussstelle durchbricht, viel unvollkommener, wenn der Luftstrom oder Ton vorhergeht und durch den plötzlich eintretenden Verschluss gehemmt wird.

Die harten Stosslaute sind *p*, *t*, *k* ” und die entsprechenden weichen *b*, *d*, *g* ’. Mit dem Zeichen ’ drücke ich den Spiritus lenis der Griechen aus, und mit ” den entsprechenden harten Laut. Auch im Deutschen sind diese Laute vorhanden, obwohl wir sie nicht durch die Schrift bezeichnen, so zum Beispiel hört man in „verachten“ je nach der weicheren oder härteren Aussprache zwischen dem *r* und *a* jene Laute sehr deutlich. Auch sie sind als Konsonanten aufzufassen, obwohl wir sie nicht als solche schreiben. Ferner ist zu bemerken, dass *k* und *g* dieselben Lautabstufungen zeigen, wie sie oben bei *ch* und entsprechend bei *gh* (*j*) dargestellt sind; † aber auch *t* und *d* zeigen viele, akustisch 626 schwer festzustellende Modifikationen.

Die Artikulation der Stosslaute ist verschieden je nach ihrer Verbindung mit anderen Lauten. Am deutlichsten ist dieselbe unmittelbar

vor Vokalen oder vor *r* und *l*. Hingegen wird die Artikulation undeutlicher am Schlusse der Wörter und Silben, wo im Deutschen nur die harten Stosslaute erscheinen (auch wo sie als weiche geschrieben werden), und vor anderen Stosslauten wie in den Verbindungen *pt*, *kt*. Hier wird nun, um die Eigenthümlichkeit des Stosslautes deutlicher hervortreten zu lassen, hinter den Stosslaut ein geflüsterter Vokal hinzugefügt, bei uns meist ein geflüstertes *e*, bei den Russen und anderen slavischen Völkern theils ein geflüstertes *i* (oder *e*), theils ein geflüstertes *u* (oder *o*), was auch in der Schrift bezeichnet und unterschieden wird.

Der Unterschied zwischen den harten und weichen Stosslauten besteht wesentlich nur in der grösseren oder geringeren Intensität, mit welcher der Verschluss aufgehoben wird, um dem folgenden Laute den Durchgang zu verstatten. Man hat irrigerweise die weichen Stosslaute als tönende Laute aufgefasst. Niemals bildet sich bei ihnen ein wirklicher Ton aus; denn wenn das wäre, so müsste man zum Beispiel mit *b*, ohne einen Vokal hinzuzufügen, eine Melodie hervorbringen können, was unmöglich ist. Veranlassung zu diesem Irrthum hat ein Geräusch gegeben, welches sich unter Umständen mit den weichen Stosslauten verbinden kann. Dies Geräusch tritt am deutlichsten hervor, wenn man ein Wort, wie im Englischen, mit einem weichen Stosslaute schliesst; alsdann tritt statt des geflüsterten Vokales, der dann nach dem harten Stosslaute ertönt, ein eigenthümlicher Laut hervor, den man „Blählaut“ genannt hat. Dies Geräusch des Blählautes tritt weder aus dem Munde, noch aus der Nase hervor; beide kann man verschliessen, ohne den Laut zu beeinträchtigen. Es entsteht dieser Laut, indem die Luft aus der Lunge durch die etwas verengte Stimmritze in den geschlossenen Mundraum getrieben wird. Er ist für die 627 Hervorbringung † der weichen Stosslaute überflüssig, ja sogar durch seinen unangenehmen Klang störend.

Endlich sind hier noch die sogenannten Aspiraten des Sanskrit, wie es heute gesprochen wird, zu erwähnen. Sie werden in der jetzigen indischen Aussprache so ausgesprochen, dass der nach dem Verschlusse hervortretende Vokal oder Halbvokal zuerst mit starkem Hauche begleitet wird. Man hat es also hier nicht mit eigenthümlichen Konsonanten zu thun, sondern mit eigenthümlichen Modifikationen des Vokales.

Schlussbemerkung.

Ich habe hier versucht, das ganze Gebiet der Sprachlaute nach ihrer akustischen Eigenthümlichkeit, wie sie vom Ohre vernommen werden, darzulegen. Ich habe mich dabei der einfachsten Mittel be-

dient, wie sie jeder, der für Musik empfänglich ist, ohne Anwendung künstlicher Hülfsapparate in Thätigkeit setzen und der Prüfung unterziehen kann.

Keineswegs glaube ich damit überall einen definitiven Abschluss erzielt zu haben, vielmehr muss vieles nur als ein erster Versuch gelten. Die Anwendung zweckmässiger Hülfsapparate, durch die man die Klänge und Geräusche zerlegen kann, halte ich keineswegs für überflüssig oder geringfügig, sondern ich erkenne sie für die genaue Feststellung der Laute geradezu als nothwendig an. Aber bei dem Mangel zuverlässiger Hülfsapparate blieb mir nichts anderes übrig, als das Ohr unmittelbar zu befragen. Und ein Hauptzweck des gegenwärtigen Aufsatzes ist es, zu solchen genauen, vollkommen objektiven Versuchen anzuregen.

Die Resonatoren können dabei in Ermangelung anderer Apparate wesentliche Dienste leisten. Aber sie bedürfen zuvor noch einer genauen Prüfung. Ihre Theorie ist, wie die treffliche Arbeit von Grinwis*) beweist, keineswegs abgeschlossen. Daher sind die Resonatoren, die man zur Zerlegung der Laute anwenden will, vorher experimentell genau zu prüfen. Namentlich ist festzustellen, † inwiefern sie eine 628 Reihe gegebener, auch ihrer Stärke nach fixirter Töne in ihrem Intensitätsverhältnisse abändern. Dass sie eine solche Abänderung bewirken, ist von vornherein klar, da die Töne, die dem Eigentone des Resonators nicht entsprechen, nur geschwächt, aber nicht ausgetilgt werden, und dies gilt namentlich von den Tönen, die mit dem Eigentone des Resonators in Harmonie stehen.

Diese Verhältnisse müssen erst durch Versuche genau festgestellt werden, ehe man sich der Resonatoren zu einer untrüglichen Analyse der Laute bedienen kann. Wie trüglich dagegen diese Analyse ohne jene Voruntersuchungen ist, sieht man aus den gewiss mit grosser Sorgfalt angestellten Versuchen von Auerbach**), deren Resultate er in seiner Tabelle II***) dargelegt hat. Diese Tabelle steht mit den unmittelbar durch das Ohr zu vernehmenden Thatsachen im grellsten Widerspruch. Zwar sucht der Verfasser jenes Aufsatzes auf eine sinnreiche Weise diese Tabelle mit den Erfahrungen in grösseren Einklang zu bringen, indem er die gefundenen Intensitätszahlen in je zwei Faktoren zerlegt und so die Tabellen III und IV ableitet, durch die er zu einfacheren Resultaten zu gelangen sucht. Aber auch dadurch

*) Poggendorffs Annalen CLX, p. 276.
**) Poggendorffs Annalen Ergänzungsband VIII, p. 177.
***) l. c. p. 190.



ist nichts gewonnen; denn das Ohr zerlegt eben die Intensitäten der von ihm wahrgenommenen Töne nicht in solche Faktoren, sondern kann jede Intensität nur als ein Ganzes auffassen.

Bei den mangelhaften Apparaten, die mir auf diesem Gebiete zu Gebote stehen, kann ich es nicht unternehmen, die oben angedeutete Voruntersuchung der Resonatoren anzustellen und so die Analyse der Sprachlaute auf festere objektive Grundlagen aufzubauen. Es wäre mir äusserst erwünscht, wenn dieser Aufsatz zu solchen Untersuchungen anregte.

Ein zweites wichtiges, ja unentbehrliches Mittel, um das Wesen der Sprachlaute und namentlich der Vokale objektiv festzustellen, ist 629 die von Helmholtz angewandte † Methode, die Klänge aus einfachen Tönen zusammenzusetzen und die so erhaltenen Klänge mit den zu untersuchenden zu vergleichen. Aber bei der Schwierigkeit, einfache Töne, namentlich in den höheren Tonlagen zu erhalten, hat Helmholtz dies Verfahren nur in wenigen Kombinationen anwenden können. Es wäre sehr schön, wenn man ein Instrument bauen könnte, welches nur einfache Töne angäbe. Undenkbar ist ein solches keineswegs. Man könnte zum Beispiel schwingende Zungen eines Harmoniums anwenden, durch angefügte Resonatoren die Obertöne fast ganz austilgen und die Hinterwand dieser Resonatoren an einen Resonanzboden fügen. Man würde dadurch bei geschickter Ausführung wohl zu einem Instrumente gelangen können, welches von Obertönen fast ganz frei wäre, und könnte dann durch Koppelung leicht alle Vokale auf demselben hervorbringen.

Stettin, den 19. Mai 1877.

Verzeichniss

der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe von den Originaldrucken abweicht.*)

S. 3, Z. 2 v. u. (Progr. 1867, S. 1, Z. 3 v. u.): Das Wort „Anm.“ vor dem Kleingedruckten steht hier wie auch später im Originale nicht und ist vom Setzer eigenmächtig hinzugefügt worden; es wieder beseitigen zu lassen erschien aber nicht nöthig. — S. 10, Z. 11 v. u. (7, Z. 1 v. u.): 1713, das Jahr des Erscheinens der zweiten Ausgabe, statt 1687. — S. 19, Z. 7 (14, Z. 2 v. u.): t_2 statt t^2. — S. 20, Z. 14 (15, Z. 10 v. u.): „geneigte“. — S. 20, Z. 15 v. u. (15, Z. 3 v. u.): „es sinkt sobald u_1 positiv wird“. — S. 21, Z. 13 v. u. (16, Z. 5 v. u.): fehlen im Original die beiden Minuszeichen. — S. 24, Z. 2 v. u. (19, Z. 19 v. u.): „$u^2 = v \,.\, BD$“. — S. 25, Z. 14 v. u. (20, Z. 7): „dessen“. — S. 26, Z. 8 (20, Z. 19): PQP und PQ statt PQP' und $P'Q$. — S. 27, Z. 14 v. u. (21, Z. 10 v. u.): „(aus 1) so“. — S. 29, Z. 13 (23, Z. 5): π statt π^2. — S. 29, Z. 2 v. u. (23, Z. 14 v. u.): „liegen“ statt „liegt“. — S. 31, Z. 1 (24, Z. 18): $ABGH$ statt $ABHG$. — S. 31, Z. 9 (24, Z. 24): $BC + BD$. — S. 32, Z. 11 v. u. (25, Z. 4 v. u.): „nach 3 und 13“. — S. 33, Z. 5, 7 (26, Z. 9, 10) Z statt Z'. — S. 35, Z. 14 v. u. (28, Z. 13): „nach 19“. — S. 36, Z. 15 v. u. (29, Z. 7 f.): „die Lagen $\alpha + \beta'$ haben“. — S. 37, Z. 15, 18, 20, 21 (29, Z. 10, 7, 5, 4 v. u.): γu statt γu_1. — S. 37, Z. 14 v. u. (30, Z. 2): „dann“ statt „denn“. — S. 41, Z. 10 (31, Z. 5 v. u.): $B_1 C_1$ statt $A_1 C_1$. — S. 41, Z. 14 v. u. (32, Z. 8): „Pfund = $\frac{1}{2}$ Kilometer“. — S. 41, Z. 3 v. u. (32, Z. 16): $2[(AA_1 + AA_m)g]$. — S. 43, Z. 6 (33, Z. 11): „zu setzen“. — Die Figuren sind sämmtlich von J. Lüroth hinzugefügt.

S. 46, Z. 7 (Math. Ann. Bd. 12, S. 222, Z. 4): „der“ statt „des“. — S. 48, Z. 20, 21 (223, Z. 4 v. u.): $a^{\underline{2}}$ statt a^2, vgl. S. 112; $\mathfrak{A}_2$ Nr. 179. — S. 53, Z. 2 v. u. (227, Z. 2 v. u.): „welcher“. — S. 55, Z. 2 v. u., 56, Z. 3 (229, Z. 14, 17): p statt p_1. — S. 56, Z. 3 v. u., 57, Z. 4 (230, Z. 5, 8) fehlen im Original Ergänzungsstriche |. — S. 58, Z. 5 (231, Z. 1 f.): „zurücktreibt“. — S. 59, Z. 13 v. u. (232, Z. 9): „nur“ statt „nun“. — S. 63,

*) Bei den Abhandlungen über Mechanik sind nur die Abweichungen angeführt, die nicht schon durch Anmerkungen unter dem Texte angezeigt sind. Die erste Seitenzahl bezieht sich immer auf die vorliegende Ausgabe, die in Klammern eingeschlossene auf den Originaldruck, dahinter steht, wenn nichts anderes bemerkt ist, der Wortlaut der Originalausgabe. Die im Texte gemachten Zusätze zum Original werden hier nicht mit aufgeführt, da sie durch Einschliessen in geschweifte Klammern { } kenntlich gemacht sind. Die Kopfüberschriften der vorliegenden Ausgabe sind sämmtlich neu.

Z. 6—4 v. u. (235, Z. 1—3) hat das Original verschiedene falsche Vorzeichen. — S. 66, Z. 20 f. (236, Z. 14 v. u.) hat das Original: „und $\delta(ae^{\alpha t})$ wird $ae^{\alpha t}\alpha$“. — S. 68, Z. 2 v. u. (237, Z. 4 v. u.) fehlt im Original der Ergänzungsstrich |. — S. 71, Z. 1 v. u. (239, Z. 1 v. u.): $y^2 = x^2 + 2\,[x\,|\,u]$.

S. 120, Z. 1 (Progr. 1839, S. 8, Z. 17 v. u.): 421 statt $4\overset{|}{2}1$. — S. 121, Z. 1 (9, Z. 13): 431 statt 432. — S. 124, Z. 12 v. u. (11, Z. 1 v. u.): „denn“ statt „dann“. — S. 131, Z. 12 f. (16, Z. 16 v. u.): „der Aussenträger $\frac{8}{10}$ oder $\frac{4}{5}$ vom Aussenradius betragen“. — S. 132, Z. 1 (16, Z. 4 v. u.): „den in s zusammenstossenden Kanten“. — S. 135, Z. 13 (18, Z. 8 v. u.): (me) statt (me_1). — S. 135, Z. 10, 9 v. u. (19, Z. 2, 3): „nur noch 2 Flächenpaare zusammenstossen“. — S. 138, Z. 15 v. u. (20, Z. 4 v. u.) am weitesten rechts steht $\overset{|}{\mathfrak{d}}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ statt $\overset{|}{\mathfrak{b}}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$. — S. 139, Z. 10 (21, Z. 16 f.): „wenn die angränzenden Flächen in eine Ebene fallen“. — S. 141, Z. 3 (22, Z. 14. v. u.) steht in dem dritten Buchstabentripel $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{d}$ statt $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}$. — S. 145, Z. 3, 7 (25, Z. 8, 10): „Fig. 11“ statt „Fig. 10 c“. — S. 145, Z. 6 v. u. (25, Z. 15 v. u.) hat das Orig.: $p = (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : (2\mathfrak{c} + \mathfrak{d} - \mathfrak{b})$. — Die Figuren sind im Original auf einer besonderen Tafel. Fig. 11 ist im Original aus den in Fig. 6 a, 6 b, 6 c gefundenen Stücken konstruirt, hier aber (S. 132) sind der Uebersichtlichkeit wegen alle Längen anderthalbmal vergrössert. Fig. 10 c (S. 145) sollte eigentlich aus den in Fig. 10 a und 10 b gefundenen Stücken konstruirt sein, doch ist das auch schon in der Originalfigur nur mangelhaft ausgeführt. In Fig. 6 c (hier S. 131), hat das Original a statt a_1. In Fig. 9 b, S. 141 und 142, ist statt des Z des Originals aus Versehen z gesetzt worden.

S. 151, Z. 9 (Pogg. Ann. Bd. 64, 1845, S. 6, Z. 12): „Für diese Längsbewegung ergiebt sich“. — S. 151, Z. 12 v. u. (6, Z. 12 v. u.): $r^2 da$ statt $r^2 d\alpha$. — S. 151, Z. 9, 7, 3 v. u. (6, Z. 10, 8, 3 v. u.) hat das Original vor jedem der drei Ausdrücke gerade das entgegengesetzte Vorzeichen. — S. 152, Z. 3 v. u. (8, Z. 3 v. u.): l statt r. — S. 152, Z. 2 v. u. (8, Z. 2 v. u.): „wenn“ statt „wo“. — S. 153, Z. 4, 3 v. u. (9, Z. 14, 13 v. u.): „mit dem Element der andern in entgegengesetzter“. — S. 154, Z. 4 (9, Z. 7 v. u.) fehlt im Original das Wörtchen „übt“; in einem der Sonderabdrücke der Arbeit ist es, anscheinend von Grassmanns eigner Hand, hinzugefügt. — Die Figuren tragen im Original ebenfalls die Nummern 1, 2, 3, befinden sich aber auf Tafel I des betreffenden Bandes; hier sind sie sämmtlich vergrössert. In Fig. 2 (S. 151 und 154) ist durch ein Versehen an der wagerecht liegenden Geraden der überflüssige Buchstabe a hinzugefügt und an der Geraden, die die Scheitel der Winkel α und β verbindet, der Buchstabe r weggelassen worden.

S. 162, Z. 20 v. u. (Pogg. Ann. Bd. 89, 1853, S. 70, Z. 6 v. u.): Bd. 13 statt Bd. 23. — S. 165, Z. 1 (74, Z. 3): „oder der andere“. — S. 170, Z. 18 v. u. (80, Z. 6 v. u.): βb_1 statt $\beta_1 b$. — Die Figuren befinden sich im Orig. auf Tafel I des betreffenden Bandes und tragen die Nummern 16, 17, 18.

S. 180, Z. 6 (Progr. 1854, S. 6, Z. 6 v. u): „his“ statt „fis“. — S. 180, Z. 14 (7, Z. 1): $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$. — S. 193 f. (19) steht mehrmals „Frauenhofer“. — S. 195, Z. 12 (20, Z. 8 v. u.): „der Tangenten“. — S. 200, Z. 10 v. u. (26, Z. 2): „Bringt man 2 ebene“.

S. 209, Z. 12, 13 (Crelles Journal Bd. 83, 1877, S. 63, Z. 7, 8) steht im Original $\underline{b}$ statt b, was hier noch nicht am Platze ist, da erst nachher die unterstrichenen Buchstaben als Zeichen für Strecken gebraucht werden, deren Längen die nichtunterstrichenen Buchstaben bedeuten. — S. 210, Z. 1, 6 (63, Z. 2 v. u., 64, Z. 4) steht im Original $[a \,.\, b]$ und $[\underline{r} \,.\, \underline{a} \,|\, \underline{b}]$; der Punkt ist hier als überflüssig weggelassen, zumal er in dem zweiten Ausdrucke zu einem Missverständniss Anlass geben kann (vgl. diese Ausgabe I, 2, S. 384, Z. 13 ff.). — S. 210, Z. 14 (64, Z. 11): b statt $\underline{b}$.

S. 212, Z. 2 v. u., 215, Z. 1 v. u. (Anhang zu Preyers Elementen der reinen Empfindungslehre 1877, S. 85, Z. 2 v. u., 87, Z. 1 v. u.): 1854 statt 1853. — S. 220, Z. 20 (92, Z. 18 v. u.) fehlt im Original die Klammer hinter entspricht.

S. 224, Z. 14 (Wiedemanns Ann. Bd. 1, 1877, S. 608, Z. 11 v. u.): A'' statt $\ddot{A}$. — S. 228, Z. 8 v. u. (614, Z. 16): „den" statt „die". — S. 230, Z. 16 (616, Z. 16) steht zuletzt $=$ statt $\equiv$. — S. 234, Z. 12 (621, Z. 13 f.): „hervorgeht".

Zu den Abhandlungen über Mechanik.

S. 6, Z. 5—2 v. u.: „Literaturzeitung" hiess damals die zweite Abtheilung der von Schlömilch begründeten Zeitschrift für Mathematik und Physik; die Schlömilchsche Beurtheilung steht in Bd. 10, 1865.

S. 71, Z. 5. Das genaue Citat ist: Mécanique céleste, I. partie, Livre IV, Chap. 3, in Bd. II der Oeuvres complètes (Paris 1875) S. 224—245.

Anmerkungen

zu den Abhandlungen über mathematische Physik.

I. Ableitung der Krystallgestalten.

Programm der Ottoschule in Stettin, 1839.

Die Ottoschule war eine Realschule zweiter Ordnung ohne Latein, also nach der heutigen Ausdrucksweise eine höhere Bürgerschule.

Die in dieser Abhandlung angewandte Bestimmung der Krystallflächen durch Zeiger (Indices) hat zuerst, im Jahre 1825, W. Whewell vorgeschlagen. Unabhängig von diesem und von einander haben sie dann im Jahre 1829 J. G. Grassmann, der Vater unsers Grassmann, und M. L. Frankenheim bekannt gemacht, aber erst die krystallographischen und mineralogischen Schriften von W. H. Miller haben ihr allgemeine Verbreitung verschafft*).

Die betreffende Schrift von Grassmanns Vater hat den Titel:

> Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre. Von Justus Günther Grassmann. Erstes Heft. Stettin, bei Friedr. Heinr. Morin. 1829.

Sie enthält XXIV und 184 Seiten 8^0 mit drei Figurentafeln und bildet das erste Heft des ersten Bandes einer vom Verfasser geplanten Zeitschrift: „Zur Mathematik und Naturkunde", von der vierteljährlich ein Heft von 6—8 Bogen erscheinen sollte, die aber nicht über dieses erste Heft hinausgediehen ist. Einen Auszug aus der genannten Schrift hat J. G. Grassmann selbst unter dem Titel: „Combinatorische Entwicklung der Krystallgestalten" in Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie veröffentlicht (Jahrg. 1833, Ergänzungsheft, S. 1—43, mit einer Figurentafel; enthalten in Bd. 30 der Annalen, Leipzig 1836).

Es ist nun sehr merkwürdig, dass H. Grassmann in seinem Programme weder diese Schrift noch auch nur den Namen seines Vaters erwähnt, obgleich er nicht blos die von seinem Vater entwickelten Vorstellungen benutzt, sondern auch dessen eigenthümliche Benennungen. Deshalb halte ich es für nöthig, aus dem Inhalte der Schrift**) des Vaters Einiges mitzutheilen, damit man sich wenigstens annähernd eine Vorstellung davon machen kann, was H. Grassmann der Schrift seines Vaters verdankt.

J. G. Grassmann entwickelt die Lehre von den Krystallgestalten als Anwendung einer „phoronomischen Combinationslehre". Da die Lage einer Ebene und aller zu ihr parallelen Ebenen durch eine beliebige auf der

*) Nach Th. Liebisch, Geometrische Krystallographie, Leipzig 1881, bei W. Engelmann; vgl. Kap. XX.

**) Wir bezeichnen diese im Folgenden kurz mit: „Ph. Kr."

Ebene senkrechte Gerade bestimmt ist, so kann man statt eine Reihe von Ebenen mit einander zu kombiniren, gerade Linien kombiniren, die auf den Ebenen senkrecht stehen und die alle durch einen Punkt gehen; jede solche Gerade „trägt“ dann die auf ihr senkrechten Ebenen. Jede durch den Punkt gehende Gerade zerfällt in zwei Theile, die, „insofern sie zur Construction der Ebenen dienen, und dieselben tragen“, „tragende Strahlen, auch schlechthin Träger“ genannt werden. Zur Bezeichnung dieser beiden, einander entgegengesetzten Theile werden dieselben Buchstaben benutzt, von denen aber einer einen Accent bekommt. Drei durch den Punkt gehende, aber nicht in einer Ebene liegende Gerade werden zu Grunde gelegt und die sechs durch sie bestimmten Träger, die „Elementarträger“, erhalten die Buchstaben: b, b', c, c', d, d'.

Jedem der sechs Elementarträger wird nun eine bestimmte Länge ertheilt, die als Maass einer Bewegung aufzufassen ist, und die Kombination dieser Elementarträger geschieht, indem die betreffenden Bewegungen nach dem Parallelogramm der Kräfte zu neuen Bewegungen zusammengesetzt werden. Die Aufstellung der aus den gegebenen Elementen ableitbaren „phoronomischen Complexionen“ bildet den Inhalt der „phoronomischen Combinationslehre“. Dabei darf jedoch eine Kombination gleichnamiger Träger wie b und b' niemals stattfinden, weil diese „sich entweder ganz oder theilweise aufheben, und die Natur entgegengesetzter Grössen haben“. Die Richtungen der Elementarträger selbst sind die Hauptrichtungen, die durch Kombination zweier unter ihnen entstehenden Richtungen heissen Zwischenrichtungen, durch Kombination dreier entstehen die Aussenrichtungen, die ausserhalb der durch die Hauptrichtungen bestimmten drei Hauptebenen liegen (Ph. Kr. S. 5—11 und 14).

Die möglichen phoronomischen Complexionen sind entweder Unionen oder Binionen oder Ternionen. Um eine bestimmte Klasse von Ternionen zu erhalten, braucht man noch drei ganze Zahlen β, γ, δ, die „Wiederholungsexponenten“, die angeben, wie oft jeder Elementarträger zur Bildung einer Complexion angewendet werden soll. Alle möglichen Complexionen mit den Wiederholungsexponenten β, γ, δ erhält man daher aus der Complexion b^β, c^γ, d^δ, wo die Exponenten nur Wiederholungszeichen sind, indem man β, γ, δ auf alle möglichen Arten vertauscht und in den entstandenen Complexionen noch einen, zwei oder drei der Elementarträger b, c, d durch den entgegengesetzten b', c', d' ersetzt. Diese 48 Complexionen kann man einfacher schreiben, indem man blos die Wiederholungsexponenten angiebt, diese gegebenen Falls mit Accenten versieht, und festsetzt, dass sich der erste Exponent immer auf b oder b', der zweite auf c oder c', der dritte auf d oder d' beziehen soll. Die so erhaltene Tabelle der 48 Complexionen stimmt, von der Anordnung abgesehen, mit der hier auf S. 122 gegebenen überein, nur dass H. Grassmann statt β, γ, δ schreibt $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$. Zwei Complexionen heissen „ähnlich“, wenn sie mit denselben Wiederholungsexponenten gebildet sind. „Aehnliche Complexionen heissen gleichwerthig, wenn die durch sie bedingten Grössen gleich sind. So sind b^2c und b^2d zwar ähnliche Complexionen, aber hier in der phoronomischen Combinationslehre nur dann gleichwerthig, wenn nicht nur $c = d$, sondern auch die Winkel, welche diese Elemente (jedes für sich) mit b machen, gleich sind“ (Ph. Kr. S. 11—50).

Durch jede phoronomische Complexion ist ein Träger bestimmt, der in seinem Endpunkte eine auf ihm senkrechte Ebene trägt. Um nun die möglichen Krystallgestalten zu entwickeln, nennt J. G. Grassmann „mit den Krystallographen eine Gestalt eine einfache, wenn sie von lauter gleichen und ähnlichen Figuren als Seitenflächen begrenzt ist". Dann gilt der Hauptsatz der phoronomischen Combinationslehre: „Die sämmtlichen gleichwerthigen Complexionen einer und derselben Form geben allemal eine einfache Gestalt." Nämlich „gleichwerthige Träger werden Ebenen hervorbringen müssen, welche nicht nur an sich gleich, sondern auch von gleicher relativer Lage sind, so dass sie sich um und um gleichmässig begrenzen". „Die Aufgabe der phoronomischen Combinationslehre, durch deren Auflösung alle bisher in der Natur beobachteten Krystallgestalten auf rein mathematischem Wege ursprünglich erzeugt werden können, lässt sich nun etwa so fassen":

„Wenn nach der Zahl der Dimensionen des Raums drei gerade sich gegenseitig halbirende Linien im Raume angenommen werden, die möglichen Lagen und Verhältnisse dieser Linien, und für jede derselben die einfachen und zusammengesetzten Gestalten zu bestimmen, welche aus den Inbegriffen der gleichwerthigen Complexionen und aus deren Verbindung hervorgehen."

„Der erste Theil dieser Aufgabe giebt die möglichen Systeme der (Krystall-)Gestalten" (Ph. Kr. S. 59—62).

Endlich führe ich noch eine Stelle aus einem „Hypothese" überschriebenen Abschnitte der Ph. Kr. an (S. 161—170, insbesondere S. 169):

„1. Jede Krystallfläche rührt von einer darauf senkrechten Kraft her, und erscheint als die Wirkung derselben."

„2. Es sind wenigstens drei solche, nicht in Einer Ebene liegende, Kräfte erforderlich, um eine Krystallgestalt zu bilden, von denen jede nach zwei entgegengesetzten Richtungen wirkt."

„3. Es können an einem Krystalle alle die Flächen vorkommen, welche aus den einfacheren Combinationen seiner Grundkräfte entstehen."

„4. Zwischen je zwei oder drei Kräften von gleichen räumlichen Verhältnissen entstehen um und um dieselben Combinationen, und bringen gleichnamige Flächen hervor, falls nicht andere Kräfte störend einwirken."

„Aus diesen wenigen Sätzen, von welchen eigentlich nur der dritte völlig hypothetisch ist, aber durch eine vollständige Induction, so weit unsere Erfahrungen reichen, hinreichend erwiesen werden kann, folgen nun alle Erscheinungen der Krystallographie."

Diese kurzen Mitteilungen, die freilich nur einen kleinen Theil des Inhalts der Ph. Kr. wiedergeben, werden zur Genüge erkennen lassen, dass H. Grassmann in seinem Programme sowohl inhaltlich wie in Bezug auf die Terminologie von der Schrift seines Vaters abhängig ist. Dagegen muss anerkannt werden, dass er die Grundgedanken wesentlich klarer und schärfer zum Ausdruck gebracht hat. Neu gegenüber der Schrift des Vaters und H. Grassmann eigenthümlich ist die mit rein elementargeometrischen Hülfsmitteln durchgeführte Konstruktion der Krystallgestalten und ihrer Begränzungsflächen. Deshalb sei das Grassmannsche Programm der Beachtung der Krystallographen empfohlen, die es bisher noch gar nicht zu kennen scheinen; selbst in dem an Literaturnachweisen so reichen Lehrbuche von

Liebisch (vgl. S. 244 Anm.) wird das Programm und überhaupt H. Grassmanns Name gar nicht erwähnt.

Uebrigens ist H. Grassmann in seiner Ausdehnungslehre von 1844 noch einmal auf die Krystallographie zurückgekommen, aber unter einem ganz andern Gesichtspunkte; vgl. diese Ausgabe I, 1, S. 281—284 und die Anmerkungen dazu S. 411—413.

Zu S. 131, Z. 5—3 v. u.: Das Auge befindet sich natürlich in unendlicher Ferne (ebenso S. 140, Z. 2—4, Z. 9, 8 v. u. und S. 146, Z. 13 f.).

Zu S. 131, Z. 2 v. u. — 132, Z. 2: In der That, bei der Gestalt mit den Zeigern $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, wo $\mathfrak{b}$ der grösste und $\mathfrak{d}$ der kleinste Zeiger ist, ergiebt sich Folgendes: Setzt man die Hauptträger gleich 1, so wird der Zwischenträger $= \sqrt{2}$, der Aussenträger $= \sqrt{3}$, also nach der Festsetzung auf S. 131, Z. 8—11 der Hauptradius $= (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$, der Zwischenradius $= \sqrt{2}$, der Aussenradius $= (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\sqrt{3} : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d})$. Infolgedessen bekommt der Aussenpunkt a, der in dem durch die Axen 010, 001, 100 bestimmten Oktanten liegt, in Bezug auf diese Axen Richtstücke (S. 126, Z. 10—8 v. u.) gleich $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d})$. Soll nun, wie es in Fig. 11 eintritt, die senkrechte Projektion von a auf die Ebene der Axen 010 und 001 mit den auf diesen Axen befindlichen Hauptpunkten h in gerader Linie liegen, so muss offenbar das Richtstück $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d})$ gleich dem halben Hauptradius, also gleich $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : 2\,\mathfrak{b}$ sein, was nur für $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ eintritt. Dagegen ist es unmöglich, dass die Projektion von a auf die genannte Ebene mit den auf die Axen 010 und 001 fallenden Projektionen der beiden Zwischenpunkte z in gerader Linie liege, denn dann müsste das auf die Axe 010 bezügliche Richtstück $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d})$ von a halb so gross sein wie das Richtstück 1 des Zwischenpunktes z, dessen Projektion in diese Axe fällt, es müsste also $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$ sein, was hier ausgeschlossen ist. Man könnte endlich noch fragen, ob in der Projektion die beiden in einem Zwischenpunkte z zusammenstossenden Kanten za in gerader Linie liegen können; soll das der Fall sein, so muss das auf die Axe 010 bezügliche Richtstück des früher besprochenen Aussenpunktes a gleich sein dem Richtstück 1 des Zwischenpunktes z, dessen Projektion in diese Axe fällt, es muss also $\mathfrak{d} = 0$ sein, was auf die in § 11 unter 3 besprochene Gestalt führt.

Zu S. 136, Z. 12. Gemeint ist die Kante hzs.

Zu S. 140. Im Originale ist kein § 17 vorhanden.

II. Neue Theorie der Elektrodynamik.

Pogg. Ann. Bd. 64 (1845).

Zu S. 151, Z. 1—3. Nennt man nämlich φ den Winkel zwischen dem Elemente b und seiner senkrechten Projektion auf die durch das Element a und durch die Mitte von b gelegte Ebene, so ist die Projektion, die Grassmann nachher mit b_1 bezeichnet: $b_1 = b \cos\varphi$. Nennt man ferner ε' den Winkel zwischen a und b_1, sowie β' den Winkel zwischen b_1 und der die Mitten beider Elemente verbindenden Geraden, so ist: $\alpha = \beta' + \varepsilon'$ und φ ist in dem sphärischen Dreiecke mit den Seiten α, β, ε die auf die Seite α oder deren Verlängerung gefällte Höhe, mithin: $\cos\alpha = \cos\alpha' \,.\, \cos\varphi$, $\cos\varepsilon = \cos\varepsilon' \,.\, \cos\varphi$.

Zu S. 151, Z. 17 v. u. Man erinnere sich, dass die Ampèresche Formel (1) eine Kraft darstellt, die positiv gerechnet wird in der Richtung vom Scheitel des Winkels β nach dem Scheitel des Winkels α.

Zu S. 151, Z. 6 v. u. vgl. S. 152, Z. 11—7 v. u.

Zu S. 154, Z. 7 v. u. Die Redeweise: „nach — ds zu differenziiren" ist etwas ungewöhnlich. Von den beiden Strömen, durch die nach S. 153, Z. 7—1 v. u. das Element ids ersetzt wird, hat der erste die Wirkung:

$$\frac{ib_1}{r}\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{ib_1}{l}(1+\cos\alpha),$$

der andere die Wirkung:

$$-\frac{ib_1}{l}(1+\cos(\alpha+d\alpha)) = -\frac{ib_1}{l}(1+\cos\alpha) + \frac{ib_1}{l}\sin\alpha d\alpha$$

und diese Ausdrücke sind zu addiren.

Zu S. 156, Z. 13 v. u. — 157, Z. 7. Im Nachlasse Grassmanns befindet sich eine Sammlung paginirter und mit Inhaltsangabe versehener Aufzeichnungen: „Elektrodynamik und Induction". Diese Aufzeichnungen stammen anscheinend noch aus dem Ende der vierziger Jahre, denn Grassmann beschäftigt sich darin unter anderm mit einer Arbeit von Franz Neumann (Allgemeine Gesetze der inducirten electrischen Ströme, aus dem Jahre 1845) und mit einer von W. Weber (Poggendorffs Annalen, Bd. 73, 1848). Als Nr. 5 enthält diese Sammlung einen Abdruck der „Neuen Theorie der Elektrodynamik" und als Nr. 6, auf S. 29 eine „Bemerkung dazu". Es heisst da wörtlich so:

„Die Formel 4 {hier S. 154} lässt sich leicht geometrisch darstellen in der Form:

$$\frac{ra\,.\,b}{(r)^3}, \tag{1}$$

wo $ra\,.\,b$ eine Strecke vorstellt, die gegen b nach derselben Seite liegt, wie a gegen r. Sind α und β die Mitten der Elemente und $\overset{|}{\alpha}$ und $\overset{|}{\beta}$ die Fusspunkte des gemeinschaftlichen Lothes der Linien A und B beider Elemente, so ist

$$r = \beta - \alpha = \beta - \overset{|}{\beta} + \overset{|}{\beta} - \overset{|}{\alpha} + \overset{|}{\alpha} - \alpha,$$

also:

$$\frac{ra\,.\,b}{(r)^3} = \frac{(\beta - \overset{|}{\beta})a\,.\,b}{r^3} + \frac{pa\,.\,b}{r^3},$$

wo $p = \overset{|}{\beta} - \overset{|}{\alpha}$ das gemeinschaftliche Loth von A auf B. Der letzte Ausdruck ist $-\frac{a \times b}{r^3}p$, der Winkel, den der erstere Ausdruck darstellt, ist $-\frac{a\,.\,b}{r^3}$, also erhalten wir als Ausdruck der Anziehung

$$-\frac{a\,.\,b}{r^3} - \frac{a \times b}{r^3}p,$$

wo $\frac{a\,.\,b}{r^3}$ den Winkel der Bewegung darstellt."

Das Verständniss dieser Betrachtung wird dadurch erschwert, dass die Bedeutung der angewandten Produktzeichen nicht ersichtlich ist; von vornherein ist nur so viel klar, dass die in den Zählern vorkommenden Buchstaben r, a, b, ebenso wie die Differenzen $\beta - \overset{|}{\beta}$ u. s. w. (vgl. A_2, Nr. 222,

Zusatz, diese Ausgabe I, 2, S. 152) Strecken bedeuten. Zum Glück lässt sich aber aus einer späteren Arbeit Grassmanns (Zur Elektrodynamik, hier S. 203—210) die Bedeutung der Formel (1) entnehmen. Dort wird nämlich (hier S. 210) die anziehende Wirkung des Elementes a auf das Element b in der Form:

$$(1') \qquad \frac{1}{r^3}[\underline{r}\,\underline{a}\,|\,\underline{b}]$$

geschrieben, wo die unterstrichenen Buchstaben die Strecken selbst darstellen, deren Längen durch die ununterstrichenen angegeben werden, und wo | das Zeichen für die innere Multiplikation ist (s. A_2, Kap. 4 und Kap. 5, § 7, diese Ausgabe I, 2, S. 112 ff.; 207 ff.), während $\underline{r}\,\underline{a}$ das äussere (kombinatorische) Produkt der beiden Strecken $\underline{r}$ und $\underline{a}$ bezeichnet (A_2, Nr. 254, d. A. I, 2, S. 169).

Versteht man nun unter α, β, α', β' einfache Punkte, so ist in der That

$$\underline{r} = \beta - \alpha = (\beta - \beta') + (\beta' - \alpha') - (\alpha - \alpha')$$

und ausserdem offenbar:

$$\beta - \beta' = \lambda \,.\, \underline{b}, \quad \alpha - \alpha' = \mu \,.\, \underline{a},$$

wo λ und μ Zahlen bedeuten, also ist das äussere Produkt $[(\alpha - \alpha')\,\underline{a}] = 0$; bezeichnet man noch das gemeinsame Loth $\alpha'\beta'$ als Strecke $\beta' - \alpha'$ aufgefasst, mit $\underline{c}$ (um das $\underline{p}$ zu vermeiden), so lässt sich der Ausdruck (1') schreiben:

$$\frac{\lambda}{r^3}[\underline{b}\,\underline{a}\,|\,\underline{b}] + \frac{1}{r^3}[\underline{c}\,\underline{a}\,|\,\underline{b}].$$

Nach A_2, Nr. 180 (d. A. I, 2, S. 136) ist aber:

$$[\underline{b}\,\underline{a}\,|\,\underline{b}] = [\underline{b}\,|\,\underline{b}]\underline{a} - [\underline{a}\,|\,\underline{b}]\underline{b}$$
$$[\underline{c}\,\underline{a}\,|\,\underline{b}] = [\underline{c}\,|\,\underline{b}]\underline{a} - [\underline{a}\,|\,\underline{b}]\,\underline{c},$$

und da die Strecke $\underline{c}$ sowohl auf $\underline{a}$ wie auf $\underline{b}$ senkrecht steht, so ist: $[\underline{c}\,|\,\underline{a}] = [\underline{c}\,|\,\underline{b}] = 0$, folglich erhält (1') jetzt die Gestalt:

$$(1'') \qquad \frac{\lambda}{r^3}([\underline{b}\,|\,\underline{b}]\underline{a} - [\underline{a}\,|\,\underline{b}]\underline{b}) - \frac{1}{r^3}[\underline{a}\,|\,\underline{b}]\,\underline{c}.$$

Hier stellt der zweite Theil augenscheinlich eine Strecke dar, die dem gemeinsamen Lothe parallel ist, bestimmt also die Verschiebung, die das Element a dem Elemente b parallel zum gemeinsamen Lothe ertheilt (S. 156, Z. 7—5 v. u.).

Der erste Theil stellt eine auf dem gemeinsamen Lothe senkrechte Strecke dar, bestimmt also die Drehung um das gemeinsame Loth, die das Element a dem Elemente b mittheilt. Dividirt man die Länge dieser Strecke durch die Entfernung der Mitte β des Elementes b von der Drehaxe, so erhält man den Schwenkungswinkel (vgl. S. 154, Z. 16—13 v. u.). Nun ist die Entfernung des Punktes β von der Drehaxe gleich der Länge der Strecke $\beta - \beta' = \lambda \,.\, \underline{b}$, also gleich $\lambda \,.\, b$, wo auf das Vorzeichen von λ keine Rücksicht genommen zu werden braucht, da sich λ schliesslich weghebt. Ferner $[\underline{b}\,|\,\underline{b}] = \underline{b}^2 = b^2$ und

$$a^2 \,.\, b^2 - [\underline{a}\,|\,\underline{b}]^2 = [\underline{a}\,\underline{b}]^2$$

(A_2, Nr. 151, 333, 177, d. A. I, 2, S. 118, 211, 136), also besitzt die Strecke: $[\underline{b}\,|\,\underline{b}]\,\underline{a} - [\underline{a}\,|\,\underline{b}]\,\underline{b}$, die wir kurz mit $\underline{s}$ bezeichnen wollen, die Länge:

$$s = \sqrt{b^4 . a^2 - 2\,b^2[a\,|\,b]^2 + b^2[a\,|\,b]^2} = b\sqrt{[\underline{a}\,\underline{b}]^2},$$

ferner ist:

$$b \cdot \sqrt{[\underline{a}\,\underline{b}]^2} = a . b^2 . \sin(\angle\, \underline{a}\,\underline{b})$$

(A_2, Nr. 198, d. A. I, 2, S. 143), mithin ergiebt sich jener Winkel gleich:

$$\frac{\lambda s}{r^3} \cdot \frac{1}{\lambda b} = \frac{1}{r^3}\, ab \sin(\angle\, \underline{a}\,\underline{b}).$$

Bedenken wir endlich, dass $ab \sin(\angle\, \underline{a}\,\underline{b})$ der Inhalt des Parallelogramms ist, das durch die beiden Strecken $\underline{a}$, $\underline{b}$ bestimmt wird und das der Grösse, der Lage und dem Sinne nach durch das äussere Produkt $[\underline{a}\,\underline{b}]$ dargestellt wird (A_2, Nr. 254, d. A. I, 2, S. 169), nehmen wir noch hinzu, dass die drei Strecken $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{s}$ alle auf dem gemeinsamen Lothe $\underline{c}$ senkrecht stehen und dass $[\underline{b}\,\underline{s}] = b^2[\underline{b}\,\underline{a}]$ ist, so erkennen wir, dass $\underline{s}$ von dem gemeinsamen Lothe aus gesehen in Bezug auf $\underline{b}$ nach derselben Seite hin liegt wie $\underline{a}$, dass also der Sinn der Drehung, die $\underline{s}$ hervorzurufen strebt, mit dem Umlaufungssinne des Parallelogramms $[\underline{b}\,\underline{a}] = -[\underline{a}\,\underline{b}]$ übereinstimmt. Demnach können wir, wenn wir wollen, den erwähnten Winkel nach Grösse und Sinn durch den Ausdruck

$$-\frac{1}{r^3}[\underline{a}\,\underline{b}]$$

darstellen und wir gelangen so zu einem Ausdrucke:

$$-\frac{1}{r^3}[\underline{a}\,\underline{b}] - \frac{1}{r^3}[\underline{a}\,|\,\underline{b}]\,\underline{c}$$

für die Wirkung des Elementes a auf das Element b, der mit dem von Grassmann angegebenen bis auf die Bezeichnung übereinstimmt und in dem der erste Theil einen Winkel bestimmt, dessen Ebene auf dem gemeinsamen Lothe senkrecht steht, der zweite eine zu diesem Lothe parallele Strecke.

Was den Unterschied der Bezeichnung angeht, so ist zu bemerken, dass Grassmann in dem mitgetheilten Manuskripte den Punkt erst als Zeichen für die innere Multiplikation eines Flächenraums und einer Strecke benutzt, dann als Zeichen für die äussere Multiplikation zweier Strecken; das innere Produkt zweier Strecken wird dagegen, wie in der geometrischen Analyse (d. A. I, 1, S. 347 ff.) durch $\times$ angedeutet.

Liegen die Elemente a und b in einer Ebene, so wird $\overset{\shortmid}{\beta} - \overset{\shortmid}{\alpha} = \underline{c}$ gleich Null, der Ausdruck (1'') reducirt sich also auf sein erstes Glied, das, vom Vorzeichen abgesehen, mit dem Ausdrucke (6) auf S. 156 übereinstimmt. Dass in dieser Formel (6) das Minuszeichen fehlt, erklärt sich daraus, dass Grassmann bei (6) nicht daran gedacht hat, auch den Sinn der Drehung durch die Formel auszudrücken, zumal er diesen Sinn vorher (S. 154, Z. 7—13) deutlich genug beschrieben hat.

Nunmehr wird es auch verständlich, was Grassmann mit den Worten auf S. 157, Z. 2 f. gemeint hat. Nämlich der Ausdruck:

$$\frac{a\,.\,b}{r^3}$$

bestimmt je nach der Bedeutung, die man dem Produkte $a\,.\,b$ giebt, die eine oder die andre der beiden Bewegungen, in die sich die Bewegung des Elementes b zerlegen lässt: fasst man $a\,.\,\underset{\cdot}{b}$ als äusseres Produkt, so bekommt man die Grösse der Schwenkung um das gemeinsame Loth, fasst man es als inneres Produkt auf, so erhält man ein Maass für die Verschiebung parallel dem gemeinsamen Lothe. Diese Verschiebung selbst erhält man, indem man $[a\,|\,b]:r^3$ mit $-\underline{c} = \overset{|}{\alpha} - \overset{|}{\beta}$ multiplicirt: es ist bemerkenswerth, dass sowohl die Schwenkung als die Verschiebung nur den Sinn wechseln, wenn man a mit b vertauscht, denn $[b\,a] = -[a\,b]$, aber $[b\,|\,a] = [a\,|\,b]$ und $\overset{|}{\beta} - \overset{|}{\alpha} = -(\overset{|}{\alpha} - \overset{|}{\beta})$, die Analogie mit der Gravitation ist also in der That so vollständig wie nur möglich.

Zu S. 158, Z. 14—8 v. u. Auch über diesen Punkt finden sich in den vorhin erwähnten Aufzeichnungen längere Entwickelungen, über die ich vielleicht im dritten Bande berichten werde.

III. Zur Theorie der Farbenmischung.

Pogg. Ann. Bd. 89 (1853).

Zu S. 161, Z. 6. Gemeint ist die Abhandlung: „Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben", Pogg. Ann. Bd. 87, S. 45—66 (1852), abgedruckt aus Müllers Archiv für Anatomie und Physiologie, 1852, S. 461—482.

Zu S. 162, Z. 20 v. u. In Pogg. Ann. Bd. 23, S. 435—443 (1831) befindet sich ein Auszug aus einer Arbeit von Brewster: „Ueber eine neue Zerlegung des Sonnenlichts, die in drei Grundfarben, welche coincidirende Spectra von gleicher Länge bilden (Edinb. Journ. of Science, N. S. Vol. V, p. 197). Auf S. 441 f. heisst es da:

„Im Sommer 1799, an einem ganz heiteren Tage, um die Mittagszeit erhielt Hassenfratz, mit einem Bündel Sonnenlichts, den er durch eine 25 Decimillimeter weite Oeffnung in ein dunkles Zimmer geleitet, und unter der Bedingung, dass Ein- und Austrittswinkel gleich waren, auf ein Prisma fallen lassen hatte, ein Spectrum von 360 Millimeter Länge, worin alle Farben vom Purpur bis zum Roth deutlich zu erkennen waren. Beim Untergang der Sonne, als sie gelb erschien, hatte das Spectrum eine geringere Länge, und ein mehr oder weniger beträchtlicher Antheil des Violett war verschwunden, ja fehlte, wie das Purpur, zuweilen gänzlich."

Zu S. 167, Z. 10 f. In der von W. Abendroth herausgegebenen Uebersetzung des ersten Buches von Newtons Optik (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 96, Leipzig bei Engelmann, 1898) findet man die Regel auf S. 99—101 als Lösung der Aufgabe 2: „In einer Mischung von primären Farben aus der gegebenen Quantität und Qualität jeder einzelnen die Farbe der Zusammensetzung zu finden."

Zu S. 168, Z. 13—8 v. u. In der auf S. 161 angeführten Arbeit von Helmholtz auf S. 58 ff.

Es ist von historischem Interesse, dass Grassmann seine Theorie der Farbenmischung schon im Oktober 1852 der physikalischen Gesellschaft zu Stettin in einem Vortrage mitgetheilt hat. Ich entnehme das den „Mittheilungen über die Thätigkeit der physikalischen Gesellschaft zu Stettin in

den Jahren von 1835—1867. Aus den Protokollen der Gesellschaft in deren Auftrage zusammengestellt von H. Balsam. Stettin 1868. Druck von R. Grassmann." Dort heisst es auf S. 60f.:

Actum Stettin, den 28. Oktober 1852.

„Prof. Grassmann über die neuesten Entdeckungen auf dem Gebiet der Farbenlehre. Nachdem der Vortragende zuvörderst eine historische Uebersicht über die verschiedenen Ansichten von den Farben und deren Mischung gegeben hatte, zeigte er, dass man, um zu einer Entscheidung zu gelangen, vor allem die objektiven Erscheinungen, wie sie sich vermittelst des Prismas zur Anschauung bringen lassen, von den subjektiven Farbeneindrücken zu sondern habe. Er wies darauf hin, wie die Farben, welche durch Zerlegung vermittelst des Prismas hervorgehen, sich objektiv nur durch ihre Schwingungsdauer unterscheiden, und dass die Schwingungsdauer für das äusserste Roth ungefähr doppelt so gross sei als für das äusserste Violett. Hieran knüpfte er einen Bericht über die von F. W. Unger im 57. Bande der Poggendorffschen Annalen mitgetheilte Farbenharmonie. Unger vergleicht die Farbenskala vom äussersten Roth bis zum äussersten Violett mit der Tonskala, indem er für das äusserste Roth einen beliebigen Grundton und dann diejenigen Farben und Töne einander entsprechend setzt, deren Schwingungsdauer zu der Schwingungsdauer jener beiden in demselben Verhältniss steht. Er behauptet nun, dass diejenigen Farben, welche den Tönen eines Accordes entsprechen, auf das Auge den wohlthuendsten Eindruck hervorbringen, namentlich die 3 Farben Roth, Gelb, Blau, welche dem Dur-Accorde entsprechen, und welche er auf den Gemälden der vorzüglichsten Maler, namentlich Raphael's, durchaus vorherrschend findet. Der Vortragende ging darauf zu den subjektiven Farben-Eindrücken über und zeigte, dass das Auge nicht im Stande sei, die Mannigfaltigkeit verschiedener auf denselben Raum gebrachter Farben zu unterscheiden, sondern dass sich diese Farben zu einem Gesammteindrucke vermischen, in welchem ausser dem Farbentone zwischen Roth und Violett nur noch die Beimischung des Weissen unterschieden werden kann. Hieran knüpfte er den Bericht über zwei Aufsätze von Helmholtz in dem letzten Bande der Poggendorffschen Annalen und hob besonders hervor, dass es nach den Versuchen von Helmholtz nur 2 Farbenpaare gebe, welche kombinirt Weiss liefern, nämlich erstens Gelb und Ultramarin, wie dies Helmholtz unmittelbar durch Beobachtungen nachweist, und zweitens Roth und Grün. Letzteres behauptete der Vortragende aus den Versuchen von Helmholtz folgern zu müssen, indem die Versuche überall auf diese Mischung des Roth und Grün hinzuweisen schienen. Zwischen diesen 4 Farben, Roth, Gelb, Grün und Blau, die hiernach als die eigentlichen Grundfarben aufzufassen seien, ordnete der Vortragende die übrigen Farben in der Art unter, dass je 2 dieser Farben gemischt die mittlere Farbe, jedoch mit Weiss vermischt liefern."

In Grassmanns Nachlass befindet sich eine kurze Notiz: „Zur Theorie der Farbenmischung 1876", aus der hier Folgendes mitgetheilt werden möge:

„Helmholtz in seinem Handbuch der physiologischen Optik (1867) S. 277—308 hat die Sätze der Farbenmischung aus meiner Abhandlung (1853) aufgenommen, nur dass er statt himmelblau den passenderen Namen Cyanblau (Berlinerblau) einführt, und Purpur als eine nur durch Mischung des

äussersten Roth und äussersten Violett herstellbare Farbe (vielleicht nach der Tabelle 237 die Oktave jenes Roth) bezeichnet. Von den Abweichungen, welche theils auf der Empfindlichkeit des Auges, theils auf objektiven Veränderungen (Diffraktion, Zerstreuung, Fluorescenz, Eigenlicht) im Auge beruhen, und von denen unten die Rede sein soll, abgesehen, hat er noch folgende wichtige Bestimmungen hinzugefügt. {Hier folgt eine Tabelle der Wellenlängen der Fraunhoferschen Linien, die zur Abgränzung der Farben dienen, und eine graphische Darstellung der Complementärfarben, nach Helmholtz, S. 277.}

„Die wesentlichen Ergänzungen sind auch durch Helmholtz nicht geliefert. Es fehlt die Bestimmung des Purpurs, welches mit einem bestimmten Grün Weiss liefert. Ferner die Bestimmung der Farbe, welche mit zwei complementären gleichviel Weiss liefert, kurz die verlangte einfache Beobachtungsreihe zur Feststellung der Farbenmischung ist nicht ausgeführt. Dagegen ist eine Reihe, freilich auch nur fragmentarischer Beobachtungen angeführt, welche den Gesetzen der Farbenmischung widersprechen würden, wenn sie nicht auf sekundären Processen oder auf unvollkommener oder irriger Schätzung oder auf Unempfindlichkeit der Sehnerven beruhten."

„Hierher gehört erstens, dass die Stärke der Lichtempfindung für verschiedene Farben nicht proportional ist der lebendigen Kraft der Aetherschwingungen. Dies beruht einestheils darauf, dass die Aetherschwingungen der verschiedenen Farben durch die durchsichtigen Mittel des Auges in verschiedenem Grade geschwächt, manche wie die ultrarothen, gar nicht durchgelassen werden, theils auf Zurückwerfung im Auge, theils auf der ungleichen Empfindlichkeit der Nerven für verschiedene Farben bei verschiedener Helligkeit; bei schwacher Beleuchtung sind die Nerven für die brechbareren Farben empfänglicher als für die weniger brechbaren, umgekehrt bei stärkerer Beleuchtung. Für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit ist das Auge für Farbenunterschiede am empfindlichsten. Immer bleibt die Abschätzung der verschiedenen Lichtstärke verschiedener Farben etwas schwankendes, zum Theil von subjektiven Urtheilen abhängiges."

„Aber auch für gleichfarbiges Licht ist die Stärke der Lichtempfindung nicht proportional der objektiven Lichtstärke, indem nämlich bei wachsender objektiver Helligkeit die Lichtempfindung in geringerem Maasse wächst."

„Zweitens ändert die grössere Helligkeit auch die Qualität des empfundenen Lichtes, indem dadurch Weiss zugemischt erscheint, ja bei sehr intensiver Helligkeit, das Licht als vollkommen weiss erscheint; ein gewisses Gelb und ein gewisses Blau ändern dabei nicht ihren Farbenton, die Farben, welche brechbarer sind als jenes Blau, lassen ihren Farbenton allmählich in dieses Blau übergehen, alle übrigen in jenes Gelb. Die dazu erforderliche Intensität ist sehr verschieden. Eine sehr geringe Steigerung der Helligkeit reicht hin, um die überblauen Töne dem blauen zu nähern, weiter in diesen zu verwandeln und weiter ihn in Weiss übergehn zu lassen. Hingegen erfordern die Farben, je weniger brechbar sie sind, eine desto grössere Intensität, um den ganzen Uebergang zu vollenden, Roth eine kaum erreichbare, Gelb erst bei blendender Helligkeit (Helmholtz 233, 234)."

„Da wir bei schwachem Lichte die Farben, namentlich die brechbareren, vollkommener zu unterscheiden vermögen als beim starken, und bei jenem sich (Helmholtz 234) die blauen Töne des Spektrums mehr dem Indigo,

Violett dem Rosa nähert, so werden wir diese letzteren als die ursprünglichen, die ersteren als durch Erhellung modificirt betrachten können. Bei den übervioletten Strahlen soll sich (?) bei äusserst schwacher Beleuchtung die Folge umkehren (von Rosa bis Blau), während sie bei etwas stärkerer Beleuchtung bläulich weiss (lavendelgrau) werden. Zur Erklärung dieser Erscheinungen hat man zweierlei ins Auge zu fassen a) die Fluorescenz der Augenmedien und zwar grünliche (bläuliche) der Netzhaut, die auch unabhängig nachgewiesen ist, und aus der Helmholtz die Erscheinungen der übervioletten (überblauen) Strahlen erklärt, und wohl noch eine gelbliche, die für das Roth als negativ anzunehmen wäre, die aber nicht für sich nachgewiesen ist, b) die bei grösserer Helligkeit zunehmende Unempfänglichkeit für Unterscheidung der Farben, welche bei den überblauen Tönen schon bei mässiger Helle eintritt, bei den am wenigsten brechbaren erst bei blendender Helle."

In seinem „Handbuche der physiologischen Optik", Leipzig bei Leopold Voss, 1867 erwähnt Helmholtz die Grassmannsche Arbeit auf S. 283, 295, 307. Auf S. 307 heisst es: „Die Untersuchung der gemischten Spectralfarben nach einer besseren Methode, welche ich ausführte, hob die scheinbaren Widersprüche {vgl. hier S. 161} gegen Newtons Regel auf, soweit sie sich auf die Anwendbarkeit der Schwerpunktskonstruktionen beziehen; dagegen musste ich freilich die Kreisform des Farbenfeldes Grassmann gegenüber als unerwiesen stehen lassen."

Endlich will ich hier noch einige Bemerkungen beifügen, die mir mein Freund O. Külpe in Würzburg zur Verfügung gestellt hat:

Die Abhandlung in Poggendorffs Annalen Bd. 89 ist von grundlegender Bedeutung für die Lehre von der Farbenmischung innerhalb einer physiologischen oder psychologischen Optik geworden. So erklärt Helmholtz (Physiolog. Optik 2. Aufl. S. 326): „Die physiologischen Voraussetzungen, welche der Ausführbarkeit und Richtigkeit eines solchen Verfahrens [der geometrischen Darstellung des Farbemischungsgesetzes von Newton] zu Grunde liegen, hat Herr H. Grassmann herausgesondert und hingestellt." Auch E. Hering hat die thatsächliche Richtigkeit der drei von Grassmann in dieser Abhandlung entwickelten Gesetze anerkannt und möchte sie nur durch einen vierten Satz ergänzt wissen, nach welchem „gleich aussehende Lichter einander gleich bleiben, wenn man die Intensität eines jeden in demselben Verhältniss vermehrt oder vermindert" (Ueber Newtons Gesetz der Farbenmischung, Lotos, Jahrb. für Naturwiss. N. F. VII. Bd. S. 242 f.). Zugleich hat freilich Hering (ebd. S. 225 ff.) gezeigt, dass die Voraussetzungen, von denen sich Grassmann bei der Deduktion seiner Sätze hat leiten lassen, unzutreffend sind, indem hier beständig subjektive (Empfindungs-) und objektive (Licht-)Werthe mit einander vermengt und Annahmen vertreten werden, die nachweislich irrig sind. Dazu gehört, dass jeder bestimmten Wellenlänge des Lichtes nur ein bestimmter Farbenton der Empfindung entspreche, dass nur die Intensität der Empfindung, nicht ihre Sättigung oder ihre Qualität, sich ändere, wenn sich die Intensität des sie erzeugenden Lichtes vermehre oder vermindere, dass endlich der letzteren die Helligkeit der Empfindung proportional sei. Schon in der ersten Auflage der Helmholtzschen physiologischen Optik waren Beobachtungen mitgetheilt, die diesen Annahmen durchaus widersprechen. Merkwürdiger Weise ist Grassmann in dem ungedruckten Manuskript (S. 252 ff.)

im Hinblick auf solche Beobachtungen der Meinung, dass sie mit den Gesetzen der Farbenmischung unvereinbar seien. Hier sowohl wie in dem Anhang zu Preyers Schrift (S. 213—221) wird daher an jenen irrigen Voraussetzungen festgehalten und eine Reihe sekundärer Umstände, wie unvollkommene Schätzung oder Fluorescenz der Augenmedien, zur Erklärung der entgegenstehenden Thatsachen herangezogen.

IV. Uebersicht der Akustik und der niedern Optik.

Programm 1854.

Ursprünglich war ich zweifelhaft, ob sich der Wiederabdruck dieses Programms lohnte, ich habe mich aber doch dafür entschieden, weil es wegen der Stoffauswahl und der Darstellung pädagogisches Interesse besitzt, dazu kommt noch, dass es die erste Veröffentlichung ist, in der Grassmann die Grundzüge seiner Vokaltheorie bekannt gemacht hat (vgl. S. 222, Z. 5 v. u.).

V. Zur Elektrodynamik.

Crelles Journal Bd. 83 (1877).

Zu S. 203, Z. 9 f., 16—19. Die hier erwähnten Abhandlungen von Clausius sind:

„Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes", Crelles Journal Bd. 82, S. 85—130 (1877).

„Ueber ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik". Vorgetragen in der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde am 6. 12. 1875, Pogg. Ann. Bd. 156 (6. Reihe Bd. 6), S. 657—660 (1875).

„Ueber das Verhalten des elektrodynamischen Grundgesetzes zum Princip von der Erhaltung der Energie und über eine noch weitere Vereinfachung des ersteren", aus den Schriften der niederrhein. Ges. mitgetheilt vom Verf. Pogg. Ann. Bd. 157 (6. Reihe Bd. 7), S. 489—494 (1876).

Endlich in den Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preussischen Rheinprovinz und Westfalen, 33. Jahrgang (4. Folge, 3. Jahrgang) Bonn 1876, zuerst kurz in einem Vortrage in der Sitzung vom 7. Februar 1876 „Das Verhalten des elektrodynamischen Grundgesetzes zum Prinzip von der Erhaltung der Energie und über eine noch weitere Vereinfachung des ersteren", Sitzungsberichte S. 18—22, ausführlicher in der Arbeit: „Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte nach dem elektrodynamischen Grundgesetze", Verhandlungen S. 407—430.

Uebrigens hat Clausius sofort die Berechtigung des von Grassmann erhobenen Anspruchs anerkannt und zwar noch in demselben, 83. Bande des Crelleschen Journals, wo man auf S. 262 f. die nachstehende Mittheilung findet:

Ueber das Grassmannsche Gesetz der ponderomotorischen Kraft.

(Von Herrn R. Clausius in Bonn.)

Herr H. Grassmann macht auf S. 57 d. B. darauf aufmerksam, dass die Ausdrücke, welche man aus dem von mir aufgestellten elektrodynamischen

Grundgesetze*) für die Componenten der ponderomotorischen Kraft zwischen zwei Stromelementen ableiten kann, genau mit dem von ihm schon im Jahre 1845 für diese Kraft aufgestellten Gesetze**) übereinstimmen. Dass mir dieses entgangen war, hat seinen Grund in einem eigenthümlichen Umstande. Ich wusste sehr wohl, dass Herr Grassmann ein von dem Ampèreschen abweichendes Gesetz für die ponderomotorische Kraft aufgestellt hat, indem ich seine interessante Abhandlung vor langer Zeit gelesen hatte, ohne mir jedoch damals, wo ich mich nicht speciell mit dem Gegenstande beschäftigte, die betreffende Formel fest einzuprägen. Als nun aus dem auf die gegenseitige Einwirkung bewegter Elektricitätstheilchen bezüglichen neuen Grundgesetze auch für die zwischen zwei Stromelementen wirkende ponderomotorische Kraft neue Ausdrücke hervorgingen, welche mit dem Ampèreschen Gesetze nicht übereinstimmten, dachte ich sofort daran, sie mit dem Grassmannschen Gesetze zu vergleichen, da mir aber jener alte Band von Poggendorffs Annalen nicht zur Hand war, so schlug ich den betreffenden Jahrgang der „Fortschritte der Physik" nach. Hier***) fand ich einen Auszug der Grassmannschen Abhandlung und darin eine Formel, welche als die Grassmannsche angeführt ist. Diese verglich ich mit den aus dem Grundgesetze hervorgehenden Ausdrücken, und da ich sie mit denselben nicht übereinstimmend fand, so betrachtete ich damit die Frage als erledigt, indem ich keinen Grund hatte, an der richtigen Wiedergabe der Formel zu zweifeln, und deshalb auf eine weitere Prüfung oder Controle einzugehen.

Jetzt aber ersehe ich aus der Note des Herrn Grassmann, infolge deren ich mir auch seine Originalabhandlung verschafft habe, dass mein Vertrauen auf jenen Auszug mich getäuscht hat, denn die Formel ist in demselben in der That unrichtig wiedergegeben. Herr Grassmann hat nämlich das Stromelement, welches die Kraft erleidet, mit b, und die Projection desselben auf eine gewisse Ebene mit b_1 bezeichnet. In seiner Formel kommt nun die Grösse b_1 vor, in jenem Auszuge aber steht an Stelle derselben b. Dass hierin eine Abweichung von der Originalabhandlung liege, konnte mir um so weniger in den Sinn kommen, als in drei der Schlussformel voraufgehenden Formeln ebenfalls immer b statt b_1 steht, und überhaupt das Zeichen b_1 mit seiner Erklärung in dem ganzen Auszuge nicht vorkommt.

Nachdem ich nun die richtige Formel kennen gelernt habe, kann ich natürlich nur bestätigen, was Herr Grassmann sagt, dass sie mit den aus dem neuen Grundgesetze hervorgehenden Ausdrücken vollkommen übereinstimmt, und ich freue mich, mit einem so gelehrten und scharfsinnigen Forscher in Untersuchungen, die auf ganz verschiedenen Wegen geführt sind, zusammengetroffen zu sein. Bonn, im Mai 1877.

Zu S. 210, Z. 4—9. Wir begnügen uns, umgekehrt nachzuweisen, dass aus der Formel (2*) für die Kraft die Formel (1) für die x-Komponente der Kraft folgt. Zu diesem Zwecke setzen wir, wie Grassmann es nachher selbst andeutet:

---

*) Dieses Journal Bd. 82, S. 85.
**) Poggendorffs Annalen Bd. 64, S. 1.
***) Fortschritte der Physik Bd. I (1845), S. 525.

$$\underline{r} = (x - x')e_1 + (y - y')e_2 + (z - z')e_3$$
$$\underline{a} = i'(dx'e_1 + dy'e_2 + dz'e_3)$$
$$\underline{b} = i(dx\,e_1 + dy\,e_2 + dz\,e_3)$$

und finden zunächst:

$$[\underline{r}\,\underline{a}] = i'\Sigma \begin{vmatrix} x - x' & y - y' \\ dx' & dy' \end{vmatrix} [e_1 e_2],$$

wo das Zeichen Σ die cyklische Summe in Bezug auf die Indices 1, 2, 3 und die Buchstaben x, y, z bezeichnet. Ferner ist (A_2, Nr. 147 und 148, d. Ausg. I, 2, S. 115 f.):

$$[e_1 \mid e_2] = [e_1 \mid e_3] = 0$$
$$[e_1 e_2 \mid e_1] = e_2, \quad [e_1 e_2 \mid e_2] = -[e_2 e_1 \mid e_2] = -e_1,$$

also:

$$[\underline{r}\,\underline{a} \mid \underline{b}] = ii'\Sigma \left\{ \begin{vmatrix} z - z' & x - x' \\ dz' & dx' \end{vmatrix} dz - \begin{vmatrix} x - x' & y - y' \\ dx' & dy' \end{vmatrix} dy \right\} e_1.$$

Demnach wird:

$$P = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$$

und:

$$X = \frac{kii'}{r^3} \left\{ dx'\Sigma(x - x')dx - (x - x')\Sigma dx\,dx' \right\},$$

was mit S. 204, Z. 8 v. u., also auch mit (1) übereinstimmt.

VI. Bemerkungen zur Theorie der Farbenempfindungen (1877).

Zu S. 216, Z. 20. In der physiol. Optik (1. Ausg.) heisst es auf S. 282, Z. 3—7: „Der Farbeneindruck, den eine gewisse Quantität x beliebig gemischten Lichtes macht, kann stets auch hervorgebracht werden durch Mischung einer gewissen Quantität a weissen Lichtes und einer gewissen Quantität b einer gesättigten Farbe (Spectralfarbe oder Purpur) von bestimmtem Farbentone."

Zu dem ganzen Aufsatze vergleiche man noch die Anmerkungen auf S. 251—255.

VII. Ueber die physikalische Natur der Sprachlaute.

Wiedemanns Annalen Bd. 1 (1877).

Zu S. 222, Z. 5 v. u. Bald nachher hatte Grassmann seine Theorie der physikalischen Gesellschaft zu Stettin ausführlicher mitgetheilt. In den auf S. 251, Z. 2 v. u. angeführten „Mittheilungen" liest man auf S. 65—67:

Actum Stettin, den 2. November 1854.

Der Professor Grassmann hält einen Vortrag über die physikalische Natur der Sprachlaute.

Der Vortragende gab zuerst eine kurze Uebersicht über die bisherige Theorie der Vokaltöne, wie sie namentlich durch Willis entwickelt worden ist; und fand das Mangelhafte dieser Theorie darin, dass erstens das Wesen des Vokales in ihr nicht klar hervortritt und zweitens in ihr nur Eine Reihe

von Vokalen angenommen wird, während doch die Vokale unendlich viele Uebergänge gestatten, und daher nicht in einer Linie sondern nur in einer Fläche dargestellt werden können. Darauf versuchte der Vortragende, diese Theorie durch eine Reihe von Versuchen zu vervollständigen. Er zeigte, wie man bei jedem Vokale ausser dem Grundtone, in welchem der Vokal gesungen wird, noch einen oder mehrere leise mitklingende Nebentöne vernimmt. Und dass diese mitklingenden Nebentöne es sind, welche dem Schalle diejenige Modifikation mittheilen, welche wir mit dem Namen eines Vokales bezeichnen. Es zeigte sich, dass diese Nebentöne bei dem Uebergange von *u* durch *ü* zu *i* nur einfach auftreten, und hier jedesmal dieselben sind, welche man bei gleicher Mundstellung durch Pfeifen hervorbringen würde. Es zeigte sich ferner, dass diese Nebentöne jedesmal diejenigen Töne sind, welche zu dem gesungenen Grundtone die harmonischen Nebentöne, d. h. diejenigen Töne sind, welche eine den Grundton angebende Saite, nach und nach hervorbringen würde, wenn man sie in 2, 3, 4 . . . . . Theile theilte. Man konnte diese Töne verfolgen vom eingestrichnen bis zum viergestrichnen *g*. Und zwar gaben die Nebentöne von $\bar{g}$ bis $\bar{\bar{g}}$ den Vokal *u*, von da bis $\bar{\bar{\bar{g}}}$ den Vokal *ü*, von da bis zum $\bar{\bar{\bar{\bar{g}}}}$ und vielleicht noch höher hinauf den Vokal *i*; woraus sich schon ergiebt, dass es unmöglich ist auf einen höhern Ton als das $\bar{\bar{g}}$ den Vokal *u* zu singen. Als das Wesen des Vokales *a* ergab sich das Mitklingen eines ganzen Accordes von Nebentönen, welche alle fast von gleicher Stärke sind. Der so mitklingende Accord besteht aus den ersten 8, und bei sächsischer Aussprache aus den ersten 6 harmonischen Nebentönen; woraus schon hervorgeht, dass weder bei sehr tiefen noch bei sehr hohen Tönen ein reines *a* zu singen möglich ist, indem es dort dem *o*, hier dem *e* sich nähert. Dann ging der Vortragende zur Betrachtung der Konsonanten über. Unter ihnen sind die Semivocales sowie die weichen Hauche (*w*, *s*, *j*) noch von einem Grundtone von bestimmter Höhe begleitet. Unter den Semivokalen wurden zuerst die Nasale betrachtet. Es zeigten sich hier bei *m*, *n*, *ng* dieselben Nebentöne wie bei *u*, *i*, *a*, mit dem Unterschiede, dass die Nebentöne hier den Grundton mehr überwuchern, und daher schon dem Laute mehr der Charakter eines Konsonanten verliehen wird. Bei dem *l* tritt eine Gruppe von Nebentönen, welche je nach der Aussprache die Nebentöne des *ü* bis *i* sind, hervor, aber viel stärker mitklingend als bei den entsprechenden Vokalen, und von den Nasalen dadurch verschieden, dass diese Tongruppe plötzlich hervortritt. Das *r* zeigte sich als ein schneller mehrfach wiederholter Wechsel zwischen dem *l* und dem Vokale.

Bei den Semivokalen fehlt das Geräusch, welches allen übrigen Konsonanten eigen ist. Das Geräusch besteht in dem Zugleicherklingen mehrerer unharmonischen Töne. Bei den Konsonanten ist aber in diesem Geräusche dennoch eine Höhe und Tiefe zu unterscheiden, indem die unharmonische Tongruppe bald höher bald tiefer liegt, bald einen grösseren bald einen geringeren Umfang einnimmt. Die Stosslaute (*p*, *t*, *k* u. s. w.) unterscheiden sich von den Hauchen nur durch ihre kurze Dauer. Es erschien daher nur nothwendig, die Hauche näher zu betrachten. Unter ihnen zeigen die weichen Hauche noch einen aus der Stimmritze hervorgehenden Ton neben dem Geräusche. Dies Geräusch umfasst bei den Gaumenbuchstaben die Nebentöne vom *a* bis zum *i*, erstere bei den Kehlbuchstaben, letztere bei

den mit der Vorderzunge gesprochenen Gaumbuchstaben. Die Lippenbuchstaben zeigen die Nebentöne des *ü* und *u*, letztere in der Englischen Aussprache hervortretend. Die Zahnbuchstaben endlich (*s*, *d*, *t*) zeigen Nebentöne, welche höher sind als die des *i*, so dass also diesen keine Vokale entsprechen. Schliesslich wurde noch auf ein Mittel hingedeutet um die Sprachlaute objektiv hervorzubringen, d. h. bloss durch gleichzeitiges Hervorbringen der gehörigen Töne in dem betreffenden Intensitätsverhältnisse.

Zu S. 223, Z. 21—23. Der Titel der Helmholtzschen Untersuchungen ist: „Die Klangfarbe der Vokale“, Vortrag in der Sitzung der Akademie vom 2. April 1859. Gelehrte Anzeigen der k. B. Akademie der Wiss. Bd. 48, Nr. 67, 18. Juni 1859, S. 537—541; Nr. 68, 20. Juni 1859, S. 545—549; Nr. 69, 22. Juni 1859, S. 553—556. Wiederabgedruckt in den Gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen Bd. I, S. 397—407.

Zu S. 224, S. 7—18. Das Citat aus den „Tonempfindungen“ ist mit den Worten: „beim scharfen *A* oder *Ä*“ zu Ende.

Zu S. 225, Z. 21 f. Das Buch von Sievers ist bei Breitkopf und Härtel erschienen, die zweite Auflage (1881) und alle folgenden unter dem Titel: „Grundzüge der Phonetik“.

Zu S. 228, Z. 21: E. von Quanten, „Einige Bemerkungen zur Helmholtzschen Vocallehre“, Pogg. Ann. Bd. 154, S. 272—294, 522—552 (1875), mitgetheilt aus der Öfversigt af Kongl. Vetensk. Akad. Handlingar, 1874, No. 6, Stockholm.

Zu S. 237, Z. 9. Der Nachweis des weichen (besser stimmhaften) Lautes *ç*, der dem altindischen *ç* entspricht, findet sich bei Ascoli, Vorlesungen über die vergleichende Lautlehre des Sanskrit, des Griechischen und des Lateinischen, gehalten an der Mailänder wissenschaftlich-litterarischen Akademie, übersetzt von Bazziger und H. Schweizer-Sidler, Halle, Buchhandlung des Waisenhauses 1872, S. 79 ff., besonders S. 86 f.

Zu S. 239, Z. 16. C. H. C. Grinwis, Ueber die Theorie der Resonatoren, aus den Archives Néerlandaises VIII, 417 mitgetheilt in Pogg. Ann. Bd. 160, S. 276—291 (1877), datirt Utrecht, März 1873.

Zu S. 239, Z. 11 v. u. F. Auerbach, „Untersuchungen über die Natur der Vocalklänge“, Poggend. Ann. Ergänzungsband VIII, Stück 2, S. 177—225 (1878), datirt Berlin 5. Juni 1876. Derselbe hat bald nachher in der Arbeit: „Zur Grassmannschen Vocaltheorie“, Wiedemanns Ann. Bd. 4, S. 508—515 (1878) Grassmanns Behauptungen zu widerlegen gesucht. Dagegen ist Grassmanns Ansichten günstig die Arbeit von J. Lahr „Die Grassmannsche Vocaltheorie im Lichte des Experiments“, Wied. Ann. Bd. 27, S. 94—119 (1886).

Zu S. 258, Z. 6 v. u. Im Originale steht: „Die Stosse“.

Sachregister

zu den Abhandlungen über Mechanik und mathematische Physik*).

*) Das Programm S. 174—202 ist hierbei ausser Betracht gelassen.

Namenregister

zu den Abhandlungen über Mechanik und mathematische Physik.

Druckfehler und Berichtigungen.

S. 41, Z. 3 v. u. fehlt die Klammer (vor AA_1.

S. 112, Z. 3 v. u. ist statt $[p\frac{2}{}]$ zu lesen: $[pq]\frac{2}{}$.

S. 119 in der Kopfüberschrift lies: Das Naturgesetz der Krystallbildung und seine Erweiterung.

S. 134, Z. 21 lies: überhaupt.

S. 141 und 142, Fig. 9b, statt z lies Z.

S. 151 und 154, Fig. 2: der Buchstabe a ist zu tilgen und an die Gerade, die die Scheitel der Winkel α und β verbindet, ist der Buchstabe r zu setzen.

S. 179, Z. 20 lies: „zwischen e und f“.

S. 201 in der Kopfüberschrift lies: „Auge und Sehen“.

Zum zweiten Theile des ersten Bandes.

S. 342, Z. 16, 18, 20 müsste eigentlich gesetzt werden:

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + p_1 e_{n+1} + \dots + p_{n-1} e_{2n-1}$$

$$dx = e_0 dx_0 + e_1 dx_1 + \dots + e_n dx_n + e_{n+1} dp_1 + \dots + e_{2n-1} dp_{n-1}$$

$$X = [l|e_0] - \sum_1^{n-1}{}_k [x|e_{n+k}]\,[l|e_k] - f\,[l|e_n].$$

(Nach einer Mittheilung von Herrn Adelung in Petersburg.)

S. 472, Z. 11—13. Folgerichtig würde man hier noch p, q, r, s durch die Ausdrücke:

$$p = [u|e_4],\quad q = [u|e_5],\quad r = [u|e_6],\quad s = [u|e_7]$$

ersetzen.

S. 488, Z. 16—20. Diese Andeutungen sind etwas zu knapp gerathen. Ist i eine der Zahlen $1 \dots 2n+2$, so ist allerdings:

$$(\mu_i,\ 0,\ \mu_1 \dots \mu_{2n+2}) = 0 = (\mu_i 0)\,(\mu_1 \dots \mu_{2n+2}),$$

wenn also die Ausdrücke $(\mu_1 0) \dots (\mu_{2n+2} 0)$ nicht alle verschwinden, so folgt sofort: $(\mu_1 \dots \mu_{2n+2}) = 0$. Sind aber diese Ausdrücke alle null, so kann man nicht so schliessen, sondern muss den Ausdruck:

$$(\mu_{2n+3}\, 0\, \mu_1 \dots \mu_{2n+2})$$



bilden, der sich unter den Voraussetzungen des Satzes auf

$$(\mu_{2n+3}\, 0)\ (\mu_1 \ldots \mu_{2n+2})$$

reducirt, der aber andrerseits in der Form:

$$(\mu_1\, 0\, \mu_2 \ldots \mu_{2n+3})$$

geschrieben werden kann und infolgedessen auch gleich

$$(\mu_1\, 0)\, (\mu_2 \ldots \mu_{2n+3})$$

ist. Verschwinden nun die Grössen $(\mu_1\, 0) \ldots (\mu_{2n+2}\, 0)$ alle, aber $(\mu_{2n+3}\, 0)$ nicht, so ergiebt sich auch jetzt $(\mu_1 \ldots \mu_{2n+2}) = 0$.